INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ 0372362000; 0372362001 🖷 0236319396
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a XII-a

Problema 1.

Pe mulţimea $A=(-1,1)$ considerăm operaţia "$*$" definită prin: $x*y=\dfrac{x+y}{1+x\cdot y}$, $(\forall)\ x,y\in A$.

a) Să se demonstreze că $(A,*)$ este grup comutativ.

b) Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{R}\to A$, $f(x)=\dfrac{e^{2\cdot x}-1}{e^{2\cdot x}+1}$, este un izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R},+)$ la $(A,*)$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $m\in$ A, ecuaţia $x*x=m$ are o unică soluţie $x\in A$.

G.M. nr 9/ 2016

Problema 2.

Să se determine funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, ştiind că admite o primitivă F care verifică relaţia:
$3\cdot x\cdot F(x)+x^2\cdot f(x)=arcctgx,\ (\forall)x\in(0,\infty)$ şi că $f(1)=0$.

problemă selectată de Laura Marin, profesor Galați

Problema 3.

a) Fie funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $e^{x-F(x)}=F(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) Se dau funcţiile: $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$, $\forall x\in(0,\infty)$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\displaystyle\int\frac{x^n\cdot e^x}{f_n^2(x)+e^{2\cdot x}}dx$, $(\forall)x\in(0,\infty)$.

G.M. nr 6/2011

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Problema 4.

Fie H un subgrup propriu finit al grupului $(G,\cdot)$ cu proprietatea că pentru orice $a\in G-H$, mulţimea $C(a)=\{x\in G \mid a\cdot x=x\cdot a\}$ are exact două elemente. Să se demonstreze că:

a) $a^2=e,\ (\forall)a\in G-H.$

b) $(\forall)a,b\in G-H,$ atunci $a\cdot b\in H.$

c) G este grup finit şi are ordinul de forma $4\cdot n+2,\ n\in\mathbb{N}^*.$

G.M.nr 4/2012

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7