Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

19 februarie 2017

Clasa a IX-a

Problema 1.

a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că numerele $n,\ n+1,\ n+2$ nu pot fi termeni ai aceleiaşi progresii geometrice.

b) Se consideră progresiile aritmetice:

1, 5, 9, 13, . . . şi

4, 15, 26, 37, . . .

Să se demonstreze că termenii lor comuni formează o nouă progresie aritmetică.
Care este raţia acestei progresii?

* **

Problema 2.

a) Să se demonstreze că $0 \le \dfrac{2\cdot|a|}{1+4\cdot a^2} \le \dfrac{1}{2},\ (\forall)a \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numerele reale x şi y, ştiind că $\left[\ \left|x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right|\ \right]+3\cdot\left\{\dfrac{2\cdot|y|}{1+4\cdot y^2}\right\}=2,5.$

$\big($s-a notat cu $[a]$ şi $\{a\}$ partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real a$\big)$.

Duma Vasile, profesor, Galați

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Problema 3.

Fie patrulaterul convex MNPQ cu $MN \cap PQ \neq \emptyset$, $[MN] \equiv [PQ]$, iar S şi T sunt mijloacele laturilor $[MQ]$, respectiv $[NP]$.

Să se demonstreze că dacă ST $\perp$ NP, atunci patrulaterul MNPQ este inscriptibil.

Prelucrare prof. Iuliana Duma, Galați

Problema 4.

Considerăm şirul crescător $(x_n)_{n\geq 1}$ al tuturor numerelor naturale care au exact 17 divizori naturali. Dacă A este o mulţime formată din 17 termeni ai şirului, să se demonstreze că suma numerelor lui A nu se divide cu 17 dacă şi numai dacă $x_7 \in$ A.

G.M., nr.11, 2016

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7