Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a X-a-Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	a) Se aplică inegalitatea mediilor: $\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \\ a+c\ge 2\cdot\sqrt{a\cdot c}\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)\cdot(a+c)\ge 4\cdot a\cdot\sqrt{b\cdot c}\Rightarrow$	1p
	$\dfrac{4bc}{(a+b)\cdot(a+c)}\le\dfrac{4bc}{4a\sqrt{bc}}=\dfrac{\sqrt{bc}}{a}.$	1p
	$b)\Leftarrow$ Dacă $a=b=c$, atunci fiecare logaritm este 0.	1p
	$\Rightarrow$ Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ f$ strict descrescătoare. Atunci $\log_a\dfrac{4bc}{(a+b)\cdot(a+c)}\ge\log_a\dfrac{\sqrt{bc}}{a}=\dfrac{1}{2}\cdot(\log_a b+\log_a c)-1\quad(1).$	1p
	La fel $\log_b\dfrac{4ac}{(a+b)\cdot(b+c)}\ge\dfrac{1}{2}\cdot(\log_b c+\log_b a)-1\quad(2)$ $\log_c\dfrac{4ab}{(a+c)\cdot(b+c)}\ge\dfrac{1}{2}\cdot(\log_c a+\log_c b)-1\ (3)$ Adunând membru cu membru relaţiile $(1),(2),(3)$, obţinem : $0\ge\dfrac{1}{2}\cdot(\log_a b+\log_a c)-1+\dfrac{1}{2}\cdot(\log_b c+\log_b a)-1+\dfrac{1}{2}\cdot(\log_c a+\log_c b)-1\Rightarrow$ $0\ge\dfrac{1}{2}\cdot(\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c a+\log_c b)-3\ (4)$	2p
	$a,b,c\in(0,1)\Rightarrow\log_a b,\log_b c,\log_c a>0.$ $\log_a b+\log_b a\ge 2,\log_b c+\log_c b\ge 2,\log_c a+\log_a c\ge 2\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}\cdot(\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c a+\log_c b)\ge 3\ (5)$ Din (4) şi (5) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}\cdot(\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c a+\log_c b)=3\Rightarrow a=b=c.$	1p

2.	Ecuaţia se mai poate scrie sub forma: $\left(x^4-x^3-x+1\right)\cdot\left(5^{x^2-1}-1\right)+\left(x^3-x^2-x+1\right)\cdot\left(5^{x^3-1}-1\right)+$ $\left(x^5-x^3-x^2+1\right)\left(5^{x-1}-1\right)=0 \Leftrightarrow$	**2p**
	$(x-1)^2\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(5^{x^2-1}-1\right)+(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot\left(5^{x^3-1}-1\right)+$ $(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(5^{x-1}-1\right)=0$ $(x-1)^2\cdot\left[\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(5^{x^2-1}-1\right)+(x+1)\cdot\left(5^{x^3-1}-1\right)+(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(5^{x-1}-1\right)\right]=0 \Rightarrow$	**1p**
	$\Rightarrow x=1$ soluţie $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(5^{x^2-1}-1\right)+(x+1)\cdot\left(5^{x^3-1}-1\right)+(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(5^{x-1}-1\right)=0;$ Dacă $x>1 \Rightarrow x^2-1>0,\ x^3-1>0$ şi $x-1>0 \Rightarrow$ cei 3 termeni sunt strict pozitivi $\Rightarrow$ nu există soluţie.	**1p**
	Dacă $-1<x<1 \Rightarrow x^2-1<0,\ x-1<0$ şi $x^3-1<0 \Rightarrow$ cei 3 termeni sunt strict negativi $\Rightarrow$ nu există soluţie.	**1p**
	$x=-1$ este soluţie;	**1p**
	Dacă $x<-1 \Rightarrow$ cei 3 termeni sunt strict pozitivi.	**1p**
	În concluzie S=$\{-1,1\}$.	

3.	Se observă că x=2 este soluţie. $\frac{8-x}{x^3-2}>0 \Rightarrow x\in\left(\sqrt[3]{2},8\right)$; Fie funcţia $f:\left(\sqrt[3]{2},8\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{8-x}{x^3-2}>0$; Demonstrăm că funcţia f este strict descrescătoare. Fie x,y $\in\left(\sqrt[3]{2},8\right)$, $x<y$ $f(y)-f(x)=\frac{8-y}{y^3-2}-\frac{8-x}{x^3-2}=\frac{(8-y)\cdot\left(x^3-2\right)-(8-x)\cdot\left(y^3-2\right)}{\left(x^3-2\right)\left(y^3-2\right)}=$ $=\frac{(y-x)\left[x^2\cdot(y-8)+y^2\cdot(x-8)-8xy+2\right]}{\left(x^3-2\right)\left(y^3-2\right)}<0$; Aşadar, $f(y)<f(x) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare; Funcţia g : $\left(\sqrt[3]{2},8\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=2019^{3x^3+3x-30}$ este strict crescătoare. x=2 este soluţie şi este unică. S=$\{2\}$.	**2p** **2p** **2p** **1p**

4.	Soluție:1 $a)\left\|S-z_1\right\|^2+\left\|S-z_2\right\|^2+\left\|S-z_3\right\|^2+\left\|S-z_4\right\|^2=$ $\left(S-z_1\right)\cdot\left(\overline{S}-\overline{z_1}\right)+\left(S-z_2\right)\cdot\left(\overline{S}-\overline{z_2}\right)+\left(S-z_3\right)\cdot\left(\overline{S}-\overline{z_3}\right)+\left(S-z_4\right)\cdot\left(\overline{S}-\overline{z_4}\right)=$ $4\cdot S\cdot\overline{S}+4-\overline{S}\cdot\left(z_1+z_2+z_3+z_4\right)-S\cdot\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_4}\right)$ $=4\cdot S\cdot\overline{S}+4-S\cdot\overline{S}-S\cdot\overline{S}=2\cdot S\cdot\overline{S}+4=2\cdot\left\|S\right\|^2+4$ $2\cdot\left\|S\right\|^2+4=4\Rightarrow\left\|S\right\|=0\Rightarrow S=0$. *b*) Fie planul complex, iar A, B, C, D sunt imaginile geometrice ale numerelor $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$, ele aparţin $C\left(O,1\right)$. Din motive de simetrie, putem lua arg z_1<arg z_2<arg z_3< arg z_4. Putem considera patrulaterul convex ABCD. Fie punctul P imaginea geometrică a sumei z_1+z_2 şi punctul R a sumei $z_3+z_4=-\left(z_1+z_2\right)\Rightarrow$ vectorii $\overrightarrow{OP}$ şi $\overrightarrow{OR}$ sunt opuşi. Cum OAPB şi OCRD sunt romburi, atunci OP $\perp$ AB şi $OR\perp CD\Rightarrow AB\parallel CD\Rightarrow$ $ABCD$ este paralelogram, este inscriptibil $\Rightarrow$ ABCD este dreptunghi. c) $\left\|z-z_1\right\|\le 1$ şi $\left\|z-z_3\right\|\le 1\Rightarrow M\left(z\right)$ aparţine discurilor $D\left(A;1\right)$ şi $D\left(C;1\right)$ care sunt tangente în O $\Rightarrow$ $z=0$ satisface condiţiile din enunţ.	**3p** **2p** **2p**