Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-y & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\\ y & 0 & 1-y\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy\\ 0 & 0 & 0\\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy)\end{pmatrix}=A(x+y-2xy),$ iar $A(x+y-2xy)\in G$ dacă $x+y-2xy\neq a,\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}-\{a\}.$	**1p**
	Asociativitatea este verificată, iar din condiţia de existenţă a elementului neutru există $\mathrm{A}(e)\in G$ astfel încât: $\mathrm{A}(x)\cdot A(e)=A(e)\cdot A(x)=A(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R}-\{a\}\Rightarrow A(x+e-2xe)=A(x)\Rightarrow$ $x+e-2xe=x\Leftrightarrow e\cdot(1-2x)=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}-(a)\Rightarrow e=0\Rightarrow$ elementul neutru este $\mathrm{A}(0),\ a\neq 0.$ Elementele simetrizabile: $(\forall)A(x)\in G,$ există $\mathrm{A}(x')\in G$ astfel încât $\mathrm{A}(x)\cdot A(x')=A(x')\cdot \mathrm{A}(x)=A(0)\Rightarrow$ $A(x+x'-2xx')=A(0)\Rightarrow x'\cdot(1-2x)=-x;$ dar pentru $x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow 0=-\frac{1}{2}(F)$	**1p**
	Deci există $\mathrm{A}(x')=A\left(\frac{-x}{1-2x}\right),\ (\forall)x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Se observă că $\frac{x}{2x-1}\neq\frac{1}{2},(\forall)x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ Aşadar, pentru ca $(G,\cdot)$ să fie grup trebuie ca $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$ Se verifică şi condiţia $x+y-2xy\neq\frac{1}{2},\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\Leftrightarrow(1-2x)\cdot(1-2y)\neq 0,(\forall)x,y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$	**2p**

	b) Se demonstrează prin inducţie matematică că $P(n): A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot A(x_3)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=$ $A\left(\frac{1}{2}-2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-x_n\right)\right),\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$ 1.Verificăm $\mathrm{P}(2)$: $\mathrm{A}(x_1)\cdot A(x_2)=$ $A\left(\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\right)$ Dar $\mathrm{A}(x_1)\cdot A(x_2)=A(x_1+x_2-2\cdot x_1\cdot x_2)$; $x_1+x_2-2\cdot x_1\cdot x_2=2\cdot x_1\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)-\left(\frac{1}{2}-x_2\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)$; Atunci $\mathrm{A}(x_1)\cdot A(x_2)=A\left(\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\right)\ (A)$ 2. Demonstrăm că $\mathrm{P}(n)\to P(n+1),\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ $P(n+1)$: $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot A(x_3)\cdot\ldots\cdot A(x_n)\cdot A(x_{n+1})=$ $A\left(\frac{1}{2}-2^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_{n+1}\right)\right)$ $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot A(x_3)\cdot\ldots\cdot A(x_n)\cdot A(x_{n+1})=$ $A\left(\frac{1}{2}-2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-x_n\right)\right)\cdot A(x_{n+1})=$ $A(t)\cdot A(x_{n+1})=A\left(\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_{n+1}\right)\right)=$ $A\left(\frac{1}{2}-2^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x_{n+1}\right)\right)\Rightarrow$ $P(n+1)\ (A)\Rightarrow \mathrm{P}(n)\ (A),\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$	**1p** **2p**
2.	Fie ord G $=2\cdot n+1,\ n\in\mathbb{N}$. Atunci $x^{2n+1}=e,(\forall)\,x\in G.$ Funcţia f este bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă. Injectivitatea: fie $x_1,x_2\in G$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$ $x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1^{2n}=x_2^{2n}\Rightarrow x_1^{2\cdot n+1}\cdot x_1^{-1}=x_2^{2\cdot n+1}\cdot x_2^{-1}\Rightarrow$ $x_1^{-1}=x_2^{-1}\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ este injectivă. (1) Surjectivitatea: din f injectivă, iar G este mulţime finită $\Rightarrow$ f este surjectivă; (2) Din 1 ,2 $\Rightarrow f$ este bijectivă.	**2p** **1p** **2p** **2p**

3.	Fie $u:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ u(x)=e^{2x}+2\sin x+3\cos x$ $u'(x)=2e^{2x}+2\cos x-3\sin x;$ Atunci $2\cdot u(x)-u'(x)=7\sin x+4\cos x$ Deci $\int f(x)dx=\int\frac{2\cdot u(x)-u'(x)}{u(x)}dx=2x-\ln\left(e^{2x}+2\sin x+3\cos x\right)+C,$ $u(x)>0,(\forall)x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ Deci primitivele funcţiei sunt de forma $F(x)=2x-\ln\left(e^{2x}+2\sin x+3\cos x\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$ $b)\int\frac{x^2-2}{x^4+8x^2+4}dx=\int\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(x^2+\frac{4}{x^2}+8\right)}dx=$ $\int\frac{\left(x+\frac{2}{x}\right)'}{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+4}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+\frac{2}{x}}{2}+C,C\in\mathbb{R}$; Deci primitivele sunt de forma $F(x)=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x^2+2}{2x}+C,C\in\mathbb{R}.$	**1p** **2p** **2p** **1p** **1p**
4.	$f''(x)-7f'(x)+10\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$ $f''(x)-2f'(x)=5\cdot\left(f'(x)-2\cdot f(x)\right),(\forall)x\in\mathbb{R}.(1)$ Fie funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f'(x)-2\cdot f(x).$ Atunci egalitatea (1) devine $g'(x)=5\cdot g(x).$ Din $g'(x)-5\cdot g(x)=0/\cdot e^{-5x}\Rightarrow\left(g(x)\cdot e^{-5x}\right)'=0\Rightarrow$ $g(x)\cdot e^{-5x}=C_1\Rightarrow g(x)=e^{5x}\cdot C_1,C_1\in\mathbb{R}.$ Înlocuind, rezultă $f'(x)-2\cdot f(x)=e^{5x}\cdot C_1/\cdot e^{-2x}\Rightarrow$ $f'(x)\cdot e^{-2x}-2\cdot f(x)\cdot e^{-2x}=e^{3x}\cdot C_1\Rightarrow$ $\left(f(x)\cdot e^{-2x}\right)'=e^{3x}\cdot C_1,\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$ Integrând $\Rightarrow f(x)\cdot e^{-2x}=\frac{e^{3x}\cdot C_1}{3}+C_2\Rightarrow$ $f(x)=\frac{e^{5x}\cdot C_1}{3}+C_2\cdot e^{2x}.$ Din condiţiile $\begin{cases}f(0)=3\\f'(0)=12\end{cases}\Rightarrow C_1=6,\ C_2=1.$ Aşadar, $f(x)=2\cdot e^{5x}+e^{2x},\ (\forall)x\in\mathbb{R},$ funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Ecuaţia $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)+3$ are soluţia x=0, deoarece membrul drept este o funcţie strict descrescătoare pe dmeniul ei maxim de definiţie.	**1p** **2p** **1p** **2p** **1p**