



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2020

Clasa a XII-a

Problema 1.

$$\text{Fie } G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} - \{a\} \right\}.$$

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât (G, \cdot) să fie grup, unde „ \cdot ” este operația de înmulțire a matricelor.

b) Să se demonstreze că

$$A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \dots \cdot A(x_n) = A\left(\frac{1}{2} - 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - x_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - x_2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} - x_n\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$
$$x_i \in \mathbb{R} - \{a\}, \quad i = \overline{1, n}$$

Problemă selectată de Mihai Totolici, profesor Galați

Problema 2.

Fie (G, \cdot) un grup finit cu un număr impar de elemente. Să se demonstreze că funcția $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2, (\forall) x \in G$, este bijectivă.

Problemă propusă de Mihai Totolici, profesor Galați

Problema 3.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

$$a) f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{7 \sin x + 4 \cos x}{e^{2x} + 2 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$b) f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 + 8x^2 + 4}.$$

Problemă selectată de Mihai Totolici, profesor Galați

Problema 4.

Rezolvați ecuația $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) + 3$, unde f este o funcție de două ori derivabilă care verifică: $f''(x) - 7f'(x) + 10 \cdot f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}, f(0) = 3, f'(0) = 12$.

G.M. Nr. 11/2019

Problemă selectată de Mihai Totolici, profesor Galați