Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală- Galaţi, 10 februarie 2024
Clasa a X-a

Barem de notare și evaluare

● **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

● **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. Problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a,b,c \in \mathbb{N}$ și $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$ $\left.\begin{array}{l} 1+2x-y^2 \geq 2 \\ 1+2y-z^2 \geq 2 \\ 1+2z-x^2 \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3 \leq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 0$ $\Longrightarrow x=y=z=1$ Deci numerele naturale $a=b=c=2$.	1p 3p 1p 1p 1p
2.	$\lvert z_1\rvert = \lvert z_2\rvert = \lvert z_3\rvert = 1 \Longrightarrow \overline{z_k} = \frac{1}{z_k}, k \in \{1,2,3\}$ $z_1+z_2+z_3=1 \to (z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1+z_2+z_3})=1$ $\to (z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=1$ $\to (z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=1$ $\to (z_1+z_2+z_3)(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)=z_1z_2z_3$ $\to (z_1+z_2)(z_3+z_2)(z_1+z_3)=0$ $\to z_3=1$ și $z_1=-z_2 \to S=1$ $\to z_1=1$ și $z_3=-z_2 \to S=1$ $\to z_2=1$ și $z_1=-z_3 \to S=1$	1p 2p 2p 2p
3.	Din inegalitatea mediilor avem $x^4+48=x^4+16+16+16 \geq 4\sqrt[4]{x^4\cdot 16\cdot 16\cdot 16}=32x, \forall x \in (0;+\infty)$, semnul „=” având loc pentru $x=2$, deci $\frac{32x}{x^4+48} \leq 1, \forall x \in (0;+\infty)$, de unde prin logaritmare rezultă că $\log_2\left(\frac{32x}{x^4+48}\right) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Membrul drept se scrie $2x^3-7x^2+4x+4=2x^3-4x^2-3x^2+6x-2x+4=$ $2x^2(x-2)-3x(x-2)-2(x-2)=(x-2)(2x^2-3x-2)=$ $=(x-2)^2(2x+1) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$, de unde rezultă concluzia problemei. Egalitatea are loc pentru $x=2$.	2p 1p 2p 2p
4.	a) Se observă că $f(n) \leq f(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$, așadar f este o funcție monoton crescătoare $f(0)=f(1)=0, f(2)=f(3)=1, f(4)=f(5)=3$, așadar $2 \notin Imf$,deci nu este surjectivă	1p 1p

	b) Fie $n = 10k + r, r \in \mathbb{N}, 0 \leq n < 9$	
	$f(n) = \left[\frac{10k + r}{2}\right] + \left[\frac{10k + r + 1}{5}\right]$	1p
	$= \left[5k + \frac{r}{2}\right] + \left[2k + \frac{r + 1}{5}\right]$	
	$= 7k + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r + 1}{5}\right]$	
	$f(10k) = f(10k + 1) = 7k$	
	$f(10k + 2) = f(10k + 3) = 7k + 1$	
	$f(10k + 4) = f(10k + 5) = 7k + 3$	
	$f(10k + 6) = f(10k + 7) = 7k + 4$	
	$f(10k + 8) = 7k + 5$	
	$f(10k + 9) = 7k + 6, k \in \mathbb{N}$	1p
	Deci ecuația $f(x) = m$ are soluție unică pentru $m \in \mathbb{N}, m = 7k + 5$ sau $m = 7k + 6$, $k \in \mathbb{N}$	1p
	Dacă $m = 7k + 5 \rightarrow x = 10k + 8 \rightarrow x = 10\frac{m-5}{7} + 8 \in \mathbb{N}$	1p
	Dacă $m = 7k + 6 \rightarrow x = 10k + 9 \rightarrow x = 10\frac{m-6}{7} + 9 \in \mathbb{N}$	1p