Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- Galaţi, 10 februarie 2024
Clasa a V-a

Barem de notare și evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. Problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) Pentru $k \geq 5, U(k!) = 0$ rezultă $U(2003 + k!) = 3$, $2003 + k!$ nu poate fi pătrat perfect Dacă $k=1 \Rightarrow 2023+1!=2024 \neq n^2$ Dacă $k=2 \Rightarrow 2023+2!=2025=45^2$ Dacă $k=3 \Rightarrow 2023+3!=2029 \neq n^2$ Dacă $k=4 \Rightarrow 2023+4!=2047 \neq n^2$ În concluzie, $k=2$ și $n=45$ b) $2023 = 44^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2$ $2023^{2023} = 2023^{2022} \cdot 2023 = 2023^{2023} \cdot \left(44^2+7^2+5^2+3^2+2^2\right)$ $\left(2023^{1011} \cdot 44\right)^2 + \left(2023^{1011} \cdot 7\right)^2 + \left(2023^{1011} \cdot 5\right)^2 + \left(2023^{1011} \cdot 3\right)^2 + \left(2023^{1011} \cdot 2\right)^2$	1p 2p 2p 1p 1p
2.	a) $10^{2024} - 2024 = 1\underbrace{00...0}_{2024\ cifre} - 2024 = \underbrace{99...97976}_{2024\ cifre}$ În scrierea numărului sunt 2 cifre de 7 și 2021 cifre de 9. b) $3 \cdot 128^{289} + 135 \cdot 3^{4 \cdot 505} + 98 \cdot 7^{2021} =$ $= 3 \cdot 2^{7 \cdot 289} + 135 \cdot 3^{2020} + 98 \cdot 7^{2021} =$ $= 3 \cdot 2^{2023} + 5 \cdot 3^3 \cdot 3^{2020} + 2 \cdot 7^2 \cdot 7^{2021} =$ $= 3 \cdot 2^{2023} + 5 \cdot 3^{2023} + 2 \cdot 7^{2023} <$ $< 3 \cdot 10^{2023} + 5 \cdot 10^{2023} + 2 \cdot 10^{2023} = 10^{2024}$	2p 1p 1p 1p 2p

3.	a) $T_1 = 5$ $T_2 = 5 + 3 = 8$ $T_3 = 5 + 3 + 9 = 17$ $T_4 = 5 + 3 + 9 + 15 = 32$ $T_5 = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 = 53$ $T_6 = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 = 80$ $T_7 = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + 33 = 113$ $T_8 = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + 33 + 39 = 152$ $T_9 = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + 33 + 39 + 45 = 197$ $T_{10} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + 33 + 39 + 45 + 51 = 248$ Găsește regula Ultimul termen 351 $T_{60} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + \cdots + 345 + 351 =$ $= 5 + \frac{354 \cdot 59}{2} = 10448$ b) $T_{61} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + \ldots + 351 + 357 = 10805$ $T_{62} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + \ldots + 357 + 363 = 11168$ $T_{63} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + \ldots + 363 + 369 = 11537$ $T_{64} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + \ldots + 369 + 375 = 11912$ $T_{65} = 5 + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + \ldots + 375 + 381 = 12293$ Numărul 12024 nu este termen al șirului.	1p 1p 2p 1p 1p 1p
4.	a) $1 + 2 + 3 + \cdots + 18 = \frac{19 \cdot 18}{2} = 171$ b) Presupunem că inițial copiii sunt numerotați, în ordine, de la 1 la 18 și cartonașul fiecărui copil este numerotat cu numărul asociat copilului. De asemenea, presupunem că atunci când un copil primește un cartonaș el șterge numărul de pe cartonaș și scrie pe el numărul asociat lui. De exemplu, dacă copilul cu numărul i dă cartonașul unui vecin, atunci cartonașul poate lua numărul $i + 1$ sau $i - 1$ dacă i este un număr de la 2 la 17, dacă copilul cu numărul 1 dă cartonașul unui vecin, atunci cartonașul poate lua numărul 2 sau 18 și dacă copilul cu numărul 18 dă cartonașul unui vecin, atunci cartonașul poate lua numărul 1 sau 17. Inițial, suma numerelor înscrise pe cartonașe este 171, care este un număr impar. Analizăm cum se modifică suma numerelor de pe toate cartonașele existente la copii, după efectuarea unei runde. 1) Dacă cei doi copii care dau cartonașe au numere asociate de la 2 la 17, atunci suma tuturor numerelor de pe cartonașele copiilor, după efectuarea rundei și modificarea numerelor de pe cartonașe, fie nu se modifică, fie crește cu 2, fie scade cu 2.	1p 1p

2) Dacă un copil care dă cartonașul are numărul asociat de la 2 la 17 și celălalt are numărul 18, atunci suma tuturor numerelor de pe cartonașele copiilor, după efectuarea rundei și modificarea numerelor de pe cartonașe, fie nu se modifică, fie scade cu 2, fie scade cu 16, fie scade cu 18.

3) Dacă un copil care dă cartonașul are numărul asociat de la 2 la 17 și celălalt are numărul 1, atunci suma tuturor numerelor de pe cartonașele copiilor, după efectuarea rundei și modificarea numerelor de pe cartonașe, fie nu se modifică, fie crește cu 2, fie crește cu 16, fie crește cu 18.

4) Dacă un copil care dă cartonașul are numărul ~~asoc~~iat 1 și celălalt are numărul 18, atunci suma tuturor numerelor de pe cartonașele copiilor, după efectuarea rundei și modificarea numerelor de pe cartonașe, fie nu se modifică, fie crește cu 16, fie scade cu 16.

Observăm că după fiecare rundă suma tuturor numerelor de pe cartonașele copiilor fie nu se modifică, fie crește sau scade cu un număr par. Cum la începutul jocului suma numerelor de pe toate cartonașele copiilor este egală cu 171, adică impară, deducem că, indiferent de modificările de pe cartonașe după efectuarea unei runde, suma numerelor de pe toate cartonașele copiilor va rămâne impară. — 4p

Dacă toate cartonașele s-ar strânge la copilul k, suma lor va fi $18 \cdot k$, care este un număr par. — 1p

Prin urmare, nu se pot strânge toate cartonașele la același copil.