Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- Galaţi, 10 februarie 2024
Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

● **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

● **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. Problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Notăm $(a,b)=d,\ d\in\mathbb{N}^*$. Există $x,y\in\mathbb{N}^*, (x,y)=1$ astfel încât $a=d\cdot x,\quad b=d\cdot y,\quad [a,b]=d\cdot x\cdot y$.	1p
	Egalitatea $2\cdot[a,b]+a+2b=13\cdot(a,b)$ devine $2xy+x+2y=13 \iff (x+1)(2y+1)=14$.	2p
	$2y+1\mid 14,\quad 2y+1-nr\ impar,\quad y\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 2y+1=7$ Rezultă $y=3$ şi $x=1$.	2p
	Numerele căutate sunt de forma $a=d,\ b=3d,\ d\in\mathbb{N}^*$, deci $4a+5b=19d$, $d\in\mathbb{N}^*$, de unde rezultă că $(4a+5b)\ \vdots\ 19$.	2p
2.	a) $135=5\cdot3^3$ Mulţimea divizorilor lui 135 este $\{1,5,3,3^2,3^3,\ 5\cdot3,5\cdot3^2,\ 5\cdot3^3\}$.	1p
	Produsul divizorilor lui 135 este: $$1\cdot5\cdot3\cdot3^2\cdot3^3\cdot5\cdot3\cdot5\cdot3^2\cdot5\cdot3^3=5^4\cdot3^{12}=(5\cdot3^3)^4=135^4.$$ Prin urmare, numărul 135 este „special”.	1p
	b) Fie n un număr „special” ai cărui divizori distincţi sunt $d_1,d_2,\dots,d_l$. Știm că $\{d_1,d_2\dots d_l\}=\left\{\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},\dots,\frac{n}{d_l}\right\}$. Dacă p reprezintă produsul divizorilor lui n, atunci $$p^2=(d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_l)\cdot\left(\frac{n}{d_1}\cdot\frac{n}{d_2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{d_l}\right)=n^l.$$ Cum $p=n^4$, obţinem $p^2=n^8\Rightarrow n^l=n^8$, deci $l=8$.	2p
	Considerăm descompunerea în produs de factori primi a lui n, $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ unde $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}^*$ şi $p_1,p_2,\dots,p_k$ numere prime cu $1<p_1<p_2<\cdots<p_k$. Numărul divizorilor lui n va fi: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)=8$	1p
	I) $k=1,\ \alpha_1+1=8\Rightarrow\alpha_1=7$ și $n=p_1^7\geq2^7=128$ care nu convine deoarece n are două cifre (II) $k=2,\ n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}$ și $(\alpha_1,\alpha_2)\in\{(1,3),(3,1)\}$ Pentru n se obțin valorile: $2^1\cdot3^3=54,\ 2^3\cdot3^1=24,\ 2^3\cdot5^1=40,\ 2^3\cdot7^1=56,$	

	$2^3 \cdot 11^1 = 88$. (III) $k = 3,\ n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$ și $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1,1,1)$ Pentru n se obțin valorile: $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30,\ 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 42,\ 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1 = 66,$ $2^1 \cdot 3^1 \cdot 13^1 = 78,\ 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 70$. $n \in \{24, 30, 40, 42, 54, 56, 66, 70, 78, 88\}$	2p
3.	Utilizăm proprietățile $(a+1)^n = \mathcal{M}_a + 1,\ n$ −număr natural $(a-1)^n = \mathcal{M}_a - 1,\ n$ −număr natural impar $2023^{2023} = (2024-1)^{2023} = \mathcal{M}_{2024} - 1,\ 2023 -$ nr. impar $2025^{2025} = (2024+1)^{2025} = \mathcal{M}_{2024} + 1,$ $2023^{2023} + 2024^{2024} + 2025^{2025} = \mathcal{M}_{2024} - 1 + \mathcal{M}_{2024} + \mathcal{M}_{2024} + 1 \Rightarrow$ $A = \mathcal{M}_{2024} = 2024 \cdot k\ , k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow A = 2^{3\cdot} \cdot 11 \cdot 23 \cdot k, k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ A \vdots 23$	 1p 2p 2p 2p
4.	a)Din $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle BOC} = \frac{m}{n}$ și $\frac{\sphericalangle BOC}{\sphericalangle COD} = \frac{n}{p}$ și faptul că semidreapta *OC* este situată în interiorul $\sphericalangle AOB$, obținem $m > n$, respectiv $n < p$. $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle BOC} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\sphericalangle AOC}{\sphericalangle BOC} = \frac{m-n}{n}\ (1)$ $\frac{\sphericalangle BOC}{\sphericalangle COD} = \frac{n}{p} \Rightarrow \frac{\sphericalangle BOC}{\sphericalangle BOD} = \frac{n}{p-n}\ (2)$ Din relaţiile (1) şi (2) deducem că $\frac{\sphericalangle AOC}{\sphericalangle BOD} = \frac{m-n}{p-n}$. b) $3m + 7n + 14p = 112 \iff 3m = 7(16 - n - 2p)$ $7/3m \Rightarrow 7/m$ şi m nr. prim $\Rightarrow m = 7$ $\left.\begin{array}{r} n + 2p = 13 \Rightarrow 2p < 13 \\ p - prim \end{array}\right\} \Rightarrow p = 2, n = 9\ sau\ p = 3, n = 7\ sau\ p = 5, n = 3$ Deoarece n este număr prim și $n < p$, convine doar cazul $p = 5$ şi obţinem $(m, n, p) = (7,3,5)$ $\frac{\sphericalangle AOB}{7} = \frac{\sphericalangle BOC}{3} = \frac{\sphericalangle COD}{5} = k°,\ k > 0$ $\Rightarrow \sphericalangle AOB = 7k°,\ \sphericalangle BOC = 3k°,\ \sphericalangle COD = 5k°$ şi $\sphericalangle AOC = 4k°$ Obţinem $k = 20$ şi $\sphericalangle AOB = 140°,\ \sphericalangle COD = 100°$. Semidreapta OX este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, deci $\sphericalangle AOX = 70°$. Semidreapta OY este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$, deci $\sphericalangle DOY = 50°$. Aşadar, $\sphericalangle XOY = 180° - (\sphericalangle AOX + \sphericalangle DOY) = 60°$.	 2p 2p 1p 2p