MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX–a – Secțiunea H2 – Profil Științe ale Naturii

Subiectul 1.

a) Arătați că dacă $a,b,c \in (0,+\infty)$ *cu* $a+b+c=1$ *, atunci* $a+1 \geq 2\sqrt{a+bc}$

b) Arătați că dacă $n \in N^*$*, atunci* $\frac{10^n+935}{45} \in N$.

Soluție:

a) Înlocuim în inegalitate cu $a=1-b-c$ și obținem

$1-b-c+1 \geq 2\sqrt{1-b-c+bc} \Rightarrow \frac{1-b+1-c}{2} \geq \sqrt{(1-b)(1-c)}$ inegalitatea mediilor…...................……3p

(sau se ridică la pătrat $2-b-c \geq 2\sqrt{1-b-c+bc}$ și se obține: $(b-c)^2 \geq 0$ cu egalitate pentru $b=c$)

b) Suma cifrelor numărătorului este 18; deci $9/10^n+935$ ………………....,....……………………......1p

Ultima cifră a numărătorului este 5 și, prin urmare $5/10^n+935$ …………………................………..1p

Deoarece 9 și 5 sunt prime între ele, rezultă că $45/10^n+935$ ……………………................………..2p

În concluzie $\frac{10^n+935}{45} \in N$.

Subiectul 2.

Un artist plastic construiește o lucrare stradală din metal, astfel: înscrie într-un pătrat dat un cerc, apoi în cerc înscrie un pătrat în care se înscrie un cerc, procedeul continuând.
a) Calculați raportul dintre suma perimetrelor primelor 24 de pătrate și suma lungimilor primelor 24 de cercuri.
b) Știind că latura primului pătrat are lungimea de 4m, putem construi 24 pătrate dacă dispunem de 54 de metri de sârmă?(Se va lua în calcul $\sqrt{2} \cong 1,41$*) Justificați răspunsul.*

Soluție

a)Considerăm latura pătratului de lungime l și notăm cu P_n perimetrul celui de-al n-lea pătrat, iar cu L_n lungimea celui de-al n-lea cerc înscris în pătratul al n-lea. …………….................................………1p

$L_1 = \pi \cdot l, L_2 = \pi \cdot \frac{l}{\sqrt{2}}, ..., L_{24} = \pi \cdot \frac{l}{\sqrt{2}^{23}}$ ………………………….........................…………………………..1p

Raportul dintre suma perimetrelor pătratelor și suma lungimilor cercurilor corespunzătoare înscrie este egal cu $\frac{4}{\pi}$ ……………………..........................……………………………………………………… 1p b)Calculăm suma progresiei geometrice notate cu S_{24} de rație $\frac{1}{\sqrt{2}}$: $S_{24}=4\cdot 4\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}^{2}}+...\frac{1}{\sqrt{2}^{23}})$ ..1p

$$S_{24}=16\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}^{24}}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}=16\cdot\frac{\frac{4095}{4096}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{4095\cdot(2+\sqrt{2})}{256}\cong\frac{4095\cdot 3,41}{256}=54,52$$ 2p

Concluzia...1p

Subiectul 3.

Un ceas electronic afișează timpul de la 00.00.00 la 23.59.59. De câte ori, în decurs de 24 de ore, apare pe ecranul ceasului un număr care se citește la fel de la stânga la dreapta ca și de la dreapta la stânga (palindrom)? Justificați răspunsul.

Soluție

Cifrele care apar pe ecran le notăm *ab.cd.mn* care satisfac condițiile:

$0\le a\le 2, 0\le b\le 9, 0\le c\le 5, 0\le d\le 9, 0\le m\le 5, 0\le n\le 9$ 2p

Din condițiile problemei, avem: $a=n, b=m, c=d$, adică vom căuta numere de forma *ab.cc.ba* 1p

Dacă *a*=0 sau *a*=1 atunci *b* și *c* sunt cifre diferite de la 0 la 5 și vom avea $2\cdot 6\cdot 6=72$ de numere...2p

Dacă *a*=2 atunci *b* poate fi 0,1,2 sau 3, iar $0\le c\le 5$.În acest caz avem $1\cdot 4\cdot 6=24$ situații...1p

În concluzie vor fi, în decurs de 24 de ore, 72+24= 96 de situații în care vor apărea numere de forma *ab.cc.ba* 1p

Subiectul 4.

a) Se consideră patrulaterul convex ABCD și un punct O interior patrulaterului. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor OAB, OBC, OCD și ODA sunt vârfurile unui paralelogram.
b) Fie ABCDE un pentagon convex și punctele $P\in(DE), Q\in(CD)$ *astfel încât* $\frac{PE}{PD}=\frac{QC}{QD}=2$.
Dacă M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și ABE, arătați că $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

Soluție

a) Notăm cu *M, N, P* și *Q* mijloacele laturilor*(AB), (BC), (CD)* și *(DA)* și cu G_1, G_2 , G_3 și G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor *OAB, OBC, OCD* și *ODA*.

Vom avea $\overrightarrow{OG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OG_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$. Deci $\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ 1p

Analog, din $\overrightarrow{OG_3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OG_4}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}\Rightarrow\overrightarrow{G_3G_4}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ 1p

Dar *MNPQ* este paralelogram și din $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\Rightarrow\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{G_4G_3}$ ceea ce trebuia demonstrat..............1p

b) Punctele P și Q impart segmentele orientate $\overrightarrow{ED}$ și respectiv $\overrightarrow{CD}$ în raportul $k=-2$.

Rezultă că $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD})$ și $\overrightarrow{NP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{NE}+2\overrightarrow{ND})$ 1p

Atunci $\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{NP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{NE}+2\overrightarrow{MN})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{MN})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN})=\vec{0}$ 2p

Prin urmare $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ 1p

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

a) *Arătați că* $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$, *oricare ar fi* $n\in\mathbb{N}^*$.

b) *Calculați partea întreagă a numărului* $A=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2025}}$.

Soluție:

a) $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow 2\sqrt{n}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Leftrightarrow\sqrt{n}<\sqrt{n+1}\,(A)$ ....**2 *puncte***

$\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\Leftrightarrow\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}\Leftrightarrow\sqrt{n-1}<\sqrt{n}\,(A)$ ....**2 *puncte***

b) În inegalitatea demonstrată la punctul a) se dau valori lui *n* de la 2 la 2025 și se adună inegalitățile......**1 *punct***

obține $2\sqrt{2026}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2025}}<2\sqrt{2025}-2$ ....,,......**1 *punct***

obține $[A]$=87...**1 *punct***

Subiectul 2.

a) *Rezolvați în* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *sistemul:* $\begin{cases}3^x-\frac{1}{y^2}=25\\ \log_9 x-\log_2 y=1\end{cases}$.

b) *Se consideră o mulțime* M *de numere complexe care satisface proprietățile:*

(1) $i\in M$.

(2) $x\in M\cap\mathbb{R}\Rightarrow(\cos 2x+i\cdot\sin 2x)\in M$.

(3) $(\cos x+i\cdot\sin x)\in M\Rightarrow x\in M$.

Arătați că $\{-1,0,1\}\subset M$.

Soluție:

a) Se pun condiții de existență a logaritmilor $x>0, y>0$ și scrie

$\log_9 x-\log_2 y=1\Leftrightarrow\log_2 y=\log_9 x-1\Leftrightarrow y=2^{\log_9 x-1}\Leftrightarrow y=\frac{2^{\log_9 x}}{2}$ ....**1 *punct***

Scrie $3^x-\frac{1}{y^2}=25\Leftrightarrow 3^x-\frac{4}{2^{2\log_9 x}}=25\Leftrightarrow 3^x-\frac{4}{2^{\log_3 x}}=25$ ....**1 *punct***

Funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x$ și $g(x)=2^{\log_3 x}$ sunt strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, prin urmare funcția $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-\frac{4}{g(x)}$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci injectivă ....**1 *punct***

Ecuația $h(x)=25$ are soluția unică $x=3$, apoi se obține $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ iar soluția sistemului este $(x,y)=\left(3,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....**1 *punct***

b) Din $(1)\Rightarrow\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}=i\in M\overset{(3)}{\Rightarrow}\frac{\pi}{2}\in M$; $\frac{\pi}{2}\in M\cap\mathbb{R}\overset{(2)}{\Rightarrow}\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1\in M$ ....**1 *punct***

$\cos\pi+i\cdot\sin\pi\in M\overset{(3)}{\Rightarrow}\pi\in M$; $\pi\in M\cap\mathbb{R}\overset{(2)}{\Rightarrow}\cos 2\pi+i\cdot\sin 2\pi=1\in M$ ....**1 *punct***

$1=\cos 0+i\cdot\sin 0\in M\overset{(3)}{\Rightarrow}0\in M$, prin urmare $\{-1,0,1\}\subset M$ ....**1 *punct***

Subiectul 3.

a) *Se consideră trei puncte A, B, C, a căror afixe sunt* $z_A=1+i$, $z_B=-1+2i$. $z_C=-1-3i$ *și un punct* $M\in(BC)$, *astfel încât* $\frac{BM}{MC}=4$. *Aflați afixul punctului* M *și arătați că:*

$AB^2\cdot MC^2+AC^2\cdot MB^2=AM^2\cdot BC^2$.

b) *Fie* $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ *astfel încât* $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ *și* $z_1+z_2+z_3=1$. *Calculați* $\frac{1}{z_1^{1011}}+\frac{1}{z_2^{1011}}+\frac{1}{z_3^{1011}}$.

Soluție:

a) Află afixul punctului M, $z_M=-1-2i$ ....**1 *punct***

Calculează lungimile segmentelor $AB=|z_A-z_B|=\sqrt{5}$, $AC=|z_A-z_C|=2\sqrt{5}$, $BC=|z_B-z_C|=5$ ....**1 *punct***

Calculează $MC=1$, $MB=4$, $MA=\sqrt{13}$ ....**1 *punct***

Verifică relația din enunț..**1 *punct***

b) Deoarece $|z_i|=1,\ i=1,2,3$ rezultă că $z_i=\frac{1}{\overline{z_i}},\ i=1,2,3$. Cum $z_1+z_2+z_3=1$ rezultă că $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=1$,

adică $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1\Leftrightarrow z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=z_1z_2z_3$..**1 *punct***

Rezultă $(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)=0$ sau $(z_1+z_2)(z_1+z_3)(z_2+z_3)=0$ ....**1 *punct***

Avem posibilitățile 1) $z_1=1$ și $z_2+z_3=0$, de unde $S=1+\frac{1}{z_2^{1011}}+\frac{1}{(-z_2)^{1011}}=1$

2) $z_2=1$ și $z_1+z_3=0$, de unde $S=1$

3) $z_3=1$ și $z_1+z_2=0$, de unde $S=1$ ....**1 *punct***

Subiectul 4.

Emilia alege un număr natural a, *știind că apoi, Alin alege la întâmplare un număr real strict pozitiv* x. *Dacă* $A=10-2\log_2 x$ *sau* $B=\log_2(16x)$ *este cel puțin egal cu* a, *atunci Alin îi va face Emiliei un cadou în valoare de* 3^a *RON. Ce număr trebuie să aleagă Emilia pentru a primi, evident, un cadou cât mai valoros și ce valoare are cadoul?*

Soluție:

$A\geq a\Leftrightarrow 10-2\log_2 x\geq a\Leftrightarrow x\leq 2^{\frac{10-a}{2}}$ ....**1 *punct***

$B\geq a\Leftrightarrow 4+\log_2 x\geq a\Leftrightarrow x\geq 2^{a-4}$ ....**1 *punct***

Pentru a fi sigură că va primi un cadou, Emilia trebuie să aleagă un număr a astfel încât $\left(0,2^{\frac{10-a}{2}}\right]\cup\left[2^{a-4},+\infty\right)=(0,+\infty)$, de unde $2^{a-4}\leq 2^{\frac{10-a}{2}}$ ....**3 *puncte***

Se obține $2^{a+\frac{a}{2}}\leq 2^9\Rightarrow a\leq 6$. ....**1 *punct***

Cum funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(a)=3^a$ este strict crescătoare, Emilia ar trebui să aleagă numărul 6 și va primi astfel de la Alin un cadou generos în valoare de 729 RON...**1 *punct***

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

O matrice de forma $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *se numește cod.*

a) *Arătați că produsul a două coduri este un cod.*

b) *Dacă* X *este un cod, arătați că* X^{-1} *este un cod.*

c) *Considerăm matricele* $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

și definim șirurile de coduri $(X_n)_{n\geq 1}$, *astfel încât:* $X_1 = I_3$; $X_{n+1} \in \{X_n + A, X_n + B, X_n + C\}$, *pentru* $n \geq 1$.

Există un șir $(X_n)_{n\geq 1}$ *care conține codul* $\begin{pmatrix}1 & 2022 & 2023\\ 0 & 1 & 2024\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$? *Dar codul* $\begin{pmatrix}1 & 2023 & 2024\\ 0 & 1 & 2025\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

SOLUȚIE:

a) $A = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix}1 & x+a & y+az+b\\ 0 & 1 & z+c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și cum $x + a, y + az + b, z + c \in \mathbb{Z} \Longrightarrow A \cdot B$ este cod 2p

b) Fie $X = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \Longrightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -a & ac-b\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $-a, ac - b, -c \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ X^{-1} este cod 2p

c) $X_2 = X_1 + T_1, X_3 = X_2 + T_2, \dots, X_{n+1} = X_n + T_n$, unde $T_1, T_2, \dots, T_n \in \{A, B, C\} \Longrightarrow X_{n+1} = X_1 + T_1 + \dots + T_n$, deci, dacă sunt $a \in \mathbb{N}$ matrice egale cu A; $b \in \mathbb{N}$ matrice egale cu B; $c \in \mathbb{N}$ matrice egale cu C, atunci $n = a + b + c$ și $X_{a+b+c+1} = I_3 + aA + bB + cC = \begin{pmatrix}1 & a+b & a+c\\ 0 & 1 & b+c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 1p

$X_{a+b+c+1} = \begin{pmatrix}1 & 2022 & 2023\\ 0 & 1 & 2024\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}a+b=2022\\ a+c=2023\\ b+c=2024\end{cases} \Longrightarrow 2(a+b+c) =$ impar, fals 1p

$X_{a+b+c+1} = \begin{pmatrix}1 & 2023 & 2024\\ 0 & 1 & 2025\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}a+b=2023\\ a+c=2024\\ b+c=2025\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=1011\\ b=1012\\ c=1013\end{cases}$

obținem codul $\begin{pmatrix}1 & 2023 & 2024\\ 0 & 1 & 2025\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ folosind transformarea $x_n \to x_n + A$ de 1011 ori, $x_n \to x_n + B$ de 1012 ori, $x_n \to x_n + C$ de 1013 ori, indiferent de ordinea transformărilor 1p

Obs.

Pentru a arăta că nu obținem codul $\begin{pmatrix}1 & 2022 & 2023\\ 0 & 1 & 2024\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ putem proceda astfel:

Fie $X_n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ și $S_n = a_n + b_n + c_n$, atunci inițial $S_0 = 0$ și cum $S_{k+1} = S_k + 2 \Longrightarrow$ $S_k =$ număr par pentru orice k, dar în final $S_n = 2022 + 2023 + 2024 =$ impar, fals.

Nu obținem codul $\begin{pmatrix} 1 & 2022 & 2023 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Subiectul 2.

Fie matricile $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$.

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *și există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $A^n = O_2$ *, atunci* $A^2 = O_2$.

c) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *și* $X^{2024} - X^{2023} = O_2$ *, demonstrați că* $X^3 - X^2 = O_2$ *.*

SOLUȚIE:

a) Se verifică prin calcul 2p

b) Dacă $n = 1, n = 2 \Longrightarrow A^2 = O_2$. Fie $n \geq 3$. Din $A^n = O_2 \Longrightarrow (\det A)^n = 0 \Longrightarrow \det A = 0$ și conform a)$A^2 = (a+d)A$. De aici $A^n = (a+d)^{n-1}A$ 2p

$(a+d)^{n-1}A = O_2 \Longrightarrow a + d = 0$ sau $A = O_2 \Longrightarrow A^2 = O_2$ 1p

c) $X^{2024} = X^{2023} \Longrightarrow (\det X)^{2023}(\det X - 1) = 0$, deci $\det X = 0$ sau $\det X = 1$.

Dacă $\det X = 1 \Longrightarrow X$ inversabilă, din $X^{2024} - X^{2023} = O_2 \Longrightarrow X = I_2 \Longrightarrow X^2 = X$ 1p

Dacă $\det X = 0 \overset{cf.a)}{\Longrightarrow} X^n = (a+d)^{n-1}X$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $X^{2024} - X^{2023} = O_2 \Longrightarrow$

$(a+d)^{2023}X - (a+d)^{2022}X = O_2 \Longrightarrow (a+d)^{2022}X(a+d-1) = O_2 \Longrightarrow a + d = 0$ sau $a + d = 1$ sau $X = O_2$; astfel:

în situația $a + d = 0 \overset{cf.a)}{\Longrightarrow} X^2 = O_2 \Longrightarrow X^3 - X^2 = O_2$;

în cazul $a + d = 1 \overset{cf.a)}{\Longrightarrow} X^2 = X \Longrightarrow X^3 - X^2 = O_2$

în cazul $X = O_2 \Longrightarrow X^3 - X^2 = O_2$ 1p

Subiectul 3.

O funcție $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *se numește interesantă dacă* $f(x) \cdot f\big(f(x)\big) = 1$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Notăm cu $\mathcal{F}$ *mulțimea funcțiilor interesante.*

a) Arătați că $\mathcal{F}$ *este mulțime nevidă.*

b) Determinați funcțiile interesante surjective.

c) Fie $f \in \mathcal{F}$ *o funcție continuă. Dacă* $f(2024) = \frac{1}{2024}$*, determinați* $f(2023)$.

SOLUȚIE:

a) $f(x) = 1, x \in (0, +\infty)$ sau $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ (sau orice alt exemplu corect). 2p

b) f surjectivă $\Longrightarrow \forall t \in (0, +\infty), \exists x_t \in (0, +\infty)$ și $f(x_t) = t$. Din $f(x_t) \cdot f\big(f(x_t)\big) = 1 \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{t}$.

Deci $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(t) = \frac{1}{t}$. 2p

c) Din $f(2024) \cdot f\big(f(2024)\big) = 1 \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2024}\right) = 2024$;.. 1p

$\frac{1}{2024}, 2024 \in Imf$ și f continuă $\Longrightarrow \left[\frac{1}{2024}, 2024\right] \subset Imf$ 1p

$2023 \in \left[\frac{1}{2024}, 2024\right] \subset Imf \Longrightarrow \exists x_0 \in (0, +\infty)$ și $f(x_0) = 2023$.

Din $f(x_0) \cdot f\big(f(x_0)\big) = 1 \Longrightarrow f(2023) = \frac{1}{2023}$. 1p

Subiectul 4.

Un fenomen fizic, modelat de funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *se numește* $a\ echilibrat$, $a>0$ *dacă există limita:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+a)}{f(x)}$ *și este egală cu 1.*

a) *Arătați că fenomenul modelat de funcția* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x}$ *este* $1\ echilibrat$.

b) *Există* $a>0$ *astfel încât fenomenul fizic modelat de funcția* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=3^x-2^x$ *să fie* $a\ echilibrat$*?*

c) *Un fenomen fizic, modelat de o funcție* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, *monoton crescătoare este* $1\ echilibrat$. *Arătați că:*

1. *fenomenul este* $n\ echilibrat$, *pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$.
2. *fenomenul este* $a\ echilibrat$, *pentru orice* $a\in(0,+\infty)$.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x+3}}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x+3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{3+\frac{5}{x}}+\sqrt{3+\frac{3}{x}}\right)}=1$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+a)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+a}-2^{x+a}}{3^x-2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+a}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x+a}\right)}{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}=3^a\neq 1$ pentru orice $a>0$; nu există a............ 2p

c)

1. $\frac{f(x+n)}{f(x)}=\frac{f(x+n)}{f(x+n-1)}\cdot\frac{f(x+n-1)}{f(x+n-2)}\cdot\ldots\cdot\frac{f(x+1)}{f(x)}$ și cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+k)}{f(x+k-1)}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t+1)}{f(t)}=1\Longrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+n)}{f(x)}=1$...... 2p

2. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $a<n\Longrightarrow x<x+a<x+n, \forall x>0\Longrightarrow f(x)\leq f(x+a)\leq f(x+n)$,

deoarece f este monoton crescătoare.

Cum $f(x)>0\Longrightarrow 1\leq\frac{f(x+a)}{f(x)}\leq\frac{f(x+n)}{f(x)}$ și cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+n)}{f(x)}=1$, deducem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+a)}{f(x)}=1$. .... 1p.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

Considerăm o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care există $T\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $f(x+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$ și mulțimea $G=\{T\in\mathbb{R}|f(x+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\}$.

a) *Arătați că adunarea numerelor reale este lege de compoziție pe G.*
b) *Demonstrați că $(G,+)$ este grup abelian.*
c) *Determinați grupul G, dacă funcția f este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}$, partea fracționară a numărului real x.*

Soluție:

a) Fie $T_1,T_2\in G\Longrightarrow f(x+T_1)=f(x),f(x+T_2)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow$

$f(x+(T_1+T_2)=f\big((x+T_1)+T_2\big)=f(x+T_1)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow T_1+T_2\in G$ 2p

b) $G\subset\mathbb{R}$ este parte stabilă pentru adunarea numerelor reale, deci ”+” este asociativă și comutativă pe G 1p

$f(x+0)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow 0\in G$ și 0 este element neutru pentru ”+” 1p

$(\forall)\,T\in G, f(x+(-T))=f(x+(-T)+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow(-T)\in G,(-T)$ este simetricul

T în raport cu ”+”, deci $(G,+)$ este grup abelian 1p

c) Fie $T\in G\Longrightarrow f(x+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow\{x+T\}=\{x\},(\forall)x\in\mathbb{R}$,

Pentru $x=0\Longrightarrow\{T\}=0\Longrightarrow T\in\mathbb{Z}\Longrightarrow G\subset\mathbb{Z}$ 1p

Fie $n\in\mathbb{Z}\Longrightarrow f(x+n)=\{x+n\}=\{x\}=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow n\in G\Longrightarrow\mathbb{Z}\subset G$, deci $G=\mathbb{Z}$ 1p

Subiectul 2.

a) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}, f,g$ continue pe $[a,b]$ și $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$. Arătați că $(\exists)\ c\in[a,b]$, astfel încât $f(c)=g(c)$.

b) Dați un exemplu de funcții f,g, care verifică condițiile de la punctul a). Pentru funcțiile de la punctul b), calculați valoarea numărului c.

Soluție:

a) Fie $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-g(x)$. Deoarece f și g sunt funcții continue pe $[a,b]\Longrightarrow$

h este continuă pe $[a,b]$ 1p

Aplicăm teorema de medie și obținem că $(\exists)\ c\in[a,b]$, astfel încât $\int_a^b h(x)dx=h(c)(b-a)$ 1p

Dar $\int_a^b h(x)dx=0\Longrightarrow h(c)(b-a)=0\Longrightarrow h(c)=0\Longrightarrow f(c)=g(c)$ 1p

b) Fie $f, g: [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b, g(x) = mx + n,\ a, b, m, n\ \in \mathbb{R}$

$\int_0^1 (ax+b)dx = \int_0^1 (mx+n)dx \implies \left(\frac{ax^2}{2} + bx\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{mx^2}{2} + nx\right)\Big|_0^1 \implies \frac{a}{2} + b = \frac{m}{2} + n$ 1p

Alegem $a = 2, b = 1, m = 1, n = \frac{3}{2},\ f(x) = 2x + 1, g(x) = x + \frac{3}{2}$ 1p

SAU:

$f, g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x, g(x) = \sin x.$ 2p

c) Conform a) $(\exists)\ c \in [0,1]$, astfel încât $f(c) = g(c) \implies 2c + 1 = c + \frac{3}{2} \implies c = \frac{1}{2} \in [0,1]$ 2p

SAU:

Numărul $c = \frac{\pi}{4}$...2p

Subiectul 3.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sin^4 x.$

a) *Exprimați* $sin^2 x$ *în funcție de* $cos2x$ *și* $sin^4 x$ *în funcție de* $cos2x$ *și* $cos4x$.

b) *Calculați primitivele funcției f pe* $\mathbb{R}$.

c) *Calculați* $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$.

Soluție:

a) $sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}, sin^4 x = \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^2 = \frac{3 - 4cos2x + cos4x}{8}$ 3p

b) $\int f(x)dx = \int \frac{3 - 4cos2x + cos4x}{8} dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + C$ 2p

c) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{3\pi - 8\sqrt{2} + 2}{64}$ 2p

Subiectul 4.

O matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c\ \in \mathbb{Q}$ *se numește cod. Notăm cu G mulțimea acestor coduri și cu H mulțimea codurilor care comută cu toate codurile din G.*

a) *Arătați că produsul a două coduri este cod.*

b) *Demonstrați că* $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x\ \in \mathbb{Q}\right\}$

c) *Arătați că* $(H, \cdot)$ *este grup abelian neizomorf cu grupul* $(\mathbb{Q}_+^*,\ \cdot)$.

Soluție:

a) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c, m, n, p\ \in \mathbb{Q} \implies$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a + m & n + ap + b \\ 0 & 1 & p + c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a + m, n + ap + b, m + c\ \in \mathbb{Q} \implies A \cdot B \in G$ 2p

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \implies A \cdot X = X \cdot A, (\forall)\ A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \implies yc = az, (\forall)\ a, c \in \mathbb{Q}$

$\implies y = z = 0 \implies X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

c) $H \subset M_3(\mathbb{Q})$ este parte stabilă pentru înmulțirea matricelor, deci "$\cdot$" este asociativă pe H,

$A \cdot B = B \cdot A, (\forall)\ A, B \in H$, deci înmulțirea este comutativă pe H, $I_3 \in H$ este element neutru pentru "$\cdot$",

$(\forall)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H, (\exists) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, deci orice matrice din H admite inversă.

Așadar $(H, \cdot)$ este grup abelian 2p

Fie $f: H \to \mathbb{Q}, f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x$. f este izomorfism între $(H, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, +) \implies (H, \cdot) \simeq (\mathbb{Q}, +)$ 1p

Dacă $(H, \cdot) \simeq (\mathbb{Q}_+^*, \cdot) \implies (\mathbb{Q}, +) \simeq (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$, fals deoarece dacă $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+^*$ este izomorfism $\implies$ g este bijectivă și $g(a + b) = g(a) \cdot g(b), (\forall) a, b \in \mathbb{Q}$. Cum g este bijectivă, există $a \in \mathbb{Q}$, cu $g(a) = 2$

$\implies 2 = g(a) = g\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \left(g\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 \implies g\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, fals 1p