



CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"



ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2024

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE  
Clasa a IX-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

**Subiectul 1.**

a) Rezolvați în  $\mathbf{R}$  ecuația  $\left[\frac{2x-3}{4}\right] = x - 1$ .

b) Demonstrați că  $|3x - 7| + 3|x - 3| \geq 2$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SOLUȚIE:**

a) Cum  $x - 1 = \left[\frac{2x-3}{4}\right]$  rezultă că  $x - 1 \in \mathbf{Z}$ , deci  $x \in \mathbf{Z}$ .....1p

$$\frac{2x-3}{4} - 1 < \left[\frac{2x-3}{4}\right] \leq \frac{2x-3}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{2x-3}{4} - 1 < x - 1 \leq \frac{2x-3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{-1, 0\} \dots\dots\dots 1p$$

b)  $|3x - 7| + 3|x - 3| = |3x - 7| + |3x - 9| = |3x - 7| + |9 - 3x| \geq \dots\dots\dots 1p$   
 $\geq |3x - 7 + 9 - 3x| = 2 \dots\dots\dots 1p$

**Subiectul 2.**

La Grădina Botanică "Anastase Fătu" din Iași s-a organizat o expoziție de plante exotice. În primele 15 zile numărul vizitatorilor a crescut cu același număr de persoane de la o zi la alta iar din a 16-a zi numărul acestora s-a înjumătățit în raport cu ziua precedentă. În cea de a 15-a zi numărul vizitatorilor a fost de 8 ori mai mare decât în prima zi iar în a 5-a zi au fost înregistrați 600 de vizitatori. Notăm cu  $a_n$  numărul de vizitatori din cea de a  $n$ -a zi.

a) Să se determine  $a_1$ ,  $a_{15}$  și  $a_{17}$ .

b) Să se determine după câte zile numărul de vizitatori înregistrați a fost 15050.

c) Stabiliți dacă mai există o zi în care expoziția a fost vizitată de același număr de persoane ca în cea de-a 17-a zi.

**SOLUȚIE:**

a)  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{15}$  formează o progresie aritmetică crescătoare cu rația  $r$ , iar  $a_{15}, a_{16}, a_{17}, \dots$

formează o progresie geometrică descrescătoare cu rația  $q = \frac{1}{2}$  .....1p

Cf. enunțului  $a_{15} = 8 \cdot a_1$  și  $a_5 = 600$  deci  $\begin{cases} a_1 + 14r = 8 \cdot a_1 \\ a_1 + 4r = 600 \end{cases}$  și găsește  $r = 100$ ,  $a_1 = 200$ ..... 1p

Calculează  $a_{15} = a_1 + 14r = 1600$  și  $a_{17} = a_{15} \cdot q^2 = 1600 \cdot \frac{1}{4} = 400$ ..... 1p

b) Calculează  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = 13500$  ..... 1p

$$a_{16} + a_{17} + \dots + a_n = a_{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + a_{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + a_{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-15} = 1600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-15} - 1}{-\frac{1}{2}} = 1600 \left(1 - \frac{1}{2^{n-15}}\right)$$

$$1600 \left(1 - \frac{1}{2^{n-15}}\right) = 15050 - 13500 = 1550 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{n-15}} = \frac{1550}{1600} \Rightarrow 2^{n-15} = 32 \Rightarrow n = 20 \dots\dots\dots 1p$$

- c) Explică faptul că egalitatea  $a_m = a_p$  poate avea loc doar dacă  $1 \leq m \leq 15$  și  $16 \leq p \leq 20$  ..... 1p  
 $a_{17} = a_1 + (m-1)r \Rightarrow 400 = 200 + (m-1) \cdot 100 \Rightarrow m = 3$  adică în cea de a treia zi. .... 1p

**Subiectul 3.**

- a) Determinați funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , care verifică pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , relația  $2f(x) - 3f(-x) = 5x - 2$ .  
b) Determinați funcțiile  $f \circ g$  și  $1_R \circ g$  pentru  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x + 2$  și  $g(x) = -2x + 1$ . Precizați punctele de intersecție ale graficului funcției  $f \circ g$  cu axele de coordonate.

**SOLUȚIE:**

- a) Pentru  $x \rightarrow -x$  relația din enunț devine  $2f(-x) - 3f(x) = -5x - 2$  ..... 1p

Rezolvă sistemul  $\begin{cases} 2f(x) - 3f(-x) = 5x - 2 \\ -3f(x) + 2f(-x) = -5x - 2 \end{cases} \Rightarrow -5f(x) = -5x - 10$  ..... 1p

Obține  $f(x) = x + 2$  ..... 1p

b)  $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (f \circ g)(x) = -2x + 3$  ..... 1p

$1_R: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, 1_R(x) = x, 1_R \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (1_R \circ g)(x) = -2x + 1$  ..... 1p

$(f \circ g)(x) = 0 \Rightarrow G_{f \circ g} \cap Ox = A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  ..... 1p

$(f \circ g)(0) = 3 \Rightarrow G_{f \circ g} \cap Oy = B(0, 3)$  ..... 1p

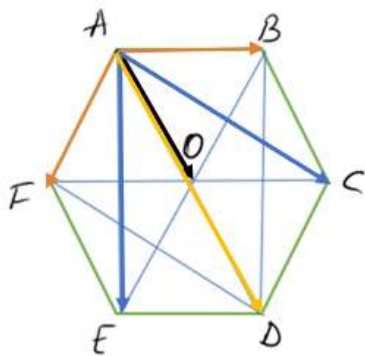
**Subiectul 4.**

În Munții Apuseni, în zona turistică Arieșeni, se pot vizita o multitudine de peșteri aflate pe trasee turistice accesibile. Șase dintre ele, notate cu A, B, C, D, E, F formează pe hartă un hexagon regulat.

Trei echipe de cercetași E1, E2, E3 au plecat simultan de la peștera A spre peștera D pe traseele A-B-D, A-F-D și respectiv A-E-D deplasându-se doar în linie dreaptă cu viteze de deplasare constante  $x, y$ , respectiv  $z$  (m/s). Știind că  $x, y, z$  verifică relațiile:  $\vec{AB} + \vec{AF} = x \cdot \vec{AO}, \vec{AC} + \vec{AE} = y \cdot \vec{AO}, \vec{AD} = z \cdot \vec{AO}$ , unde O este centrul hexagonului, să se determine:

- a) Vitezele de deplasare ale celor trei echipe;  
b) Ordinea sosirii echipelor la destinație;  
c) Distanțele parcurse de cele trei echipe, știind că latura hexagonului este de 4 cm iar scara hărții este de 1 : 100.000, (se aproximează  $\sqrt{3} \approx 1,73$ ).

**SOLUȚIE:**



a)  $\vec{AB} + \vec{AF} = \vec{AO}$  (reg. paralelogramului)  $\Rightarrow x = 1 \text{ m/s}$   
 $\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD} = 2 \cdot \vec{AO} \Rightarrow z = 2 \text{ m/s} \dots\dots\dots 1\text{p}$

$$\vec{AC} + \vec{AE} = \underbrace{(\vec{AO} + \vec{OC})}_{\text{reg } \Delta} + \underbrace{(\vec{AO} + \vec{OE})}_{\text{reg } \Delta} = 2\vec{AO} + \underbrace{(\vec{OC} + \vec{OE})}_{\vec{OD}(\text{reg } \square)} = 2\vec{AO} + \vec{AO} = 3\vec{AO}$$

Deci din  $\vec{AC} + \vec{AE} = y \cdot \vec{AO} \Rightarrow y = 3 \text{ m/s} \dots\dots\dots 2\text{p}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{rel (1)}}$

b) Justifică egalitatea lungimilor celor 3 trasee  $AB + BD = AF + FD = AE + ED$  deoarece  
 $AB = AF = ED$  (laturi hexagon) și  $BD = FD = AE$  (diagonale în romburi identice) .....1p

Traseele fiind egale, ordinea sosirii este data de ordinea descrescătoare a vitezelor echipelor. Avem că  $x < z < y$  deci echipa E2 ajunge prima (are viteză cea mai mare) urmată de echipa E3 iar echipa E1 ajunge ultima.....1p

c) Calculează lungimea unui traseu pe hartă de exemplu:

$$AB + BD = l + 2 \cdot h_{\Delta BOC_{ech}} = 4 + 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4(1 + \sqrt{3}) \simeq 4(1 + 1,73) = 10,92 \text{ cm} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Determină distanța reală a traseului:  $10,92 \text{ cm} \cdot 100000 = 1092000 \text{ cm} = 10,92 \text{ Km} \dots\dots\dots 1\text{p}$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ 10 martie 2024



FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE Clasa a X-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) 6 · 9^1/x - 13 · 6^1/x + 6 · 4^1/x = 0 .

b) log2 x / log4(2x) = log8(4x) / log16(8x) .

c) sqrt(5x-1)/(x-1) + sqrt(x-1)/sqrt(5x-1) = 10/3 .

SOLUȚIE:

a) Domeniul de existență a ecuației este R \ {0}. Împărțim membrii ecuației prin 4^1/x și obținem ecuația 6 · [(3/2)^1/x]^2 - 13 · (3/2)^1/x + 6 = 0. Notăm (3/2)^1/x = y, unde y > 0 și obținem ecuația 6y^2 - 13y + 6 = 0, cu soluțiile y1 = 2/3, y2 = 3/2. ....1p

(3/2)^1/x = 2/3 => x = -1 in R \ {0}; (3/2)^1/x = 3/2 => x = 1 in R \ {0}. S = {-1; 1}. ....1p

b) Domeniul de existență a ecuației este (0; infinity) \ {1/8; 1/2}. Schimbăm bazele logaritmilor și obținem log4(2x) = (1+log2 x)/2, log8(4x) = (2+log2 x)/3, log16(8x) = (3+log2 x)/4. ....1p

Notăm log2 x = y, obținem ecuația de gradul al doilea y^2 + 3y - 4 = 0, y1 = -4, y2 = 1. ....1p

log2 x = -4 => x = 1/16 in (0; infinity) \ {1/8; 1/2}; log2 x = 1 => x = 2 in (0; infinity) \ {1/8; 1/2}. S = {1/16; 2}. ....1p

c) Domeniul de existență a ecuației este (-infinity; 1/5) union (1; infinity). Notăm sqrt(5x-1)/(x-1) = y, sqrt(x-1)/sqrt(5x-1) = 1/y, y > 0.

Ecuația devine 3y^2 - 10y + 3 = 0, cu soluțiile y1 = 1/3 > 0, y2 = 3 > 0. ....1p

sqrt(5x-1)/(x-1) = 1/3 => x = 2/11 in (-infinity; 1/5); sqrt(5x-1)/(x-1) = 3 => x = 2 in (1; infinity). S = {2/11; 2}. ....1p

Subiectul 2.

a) Fie z = (3 + 5i)^4n + (5 + 3i)^4n, unde i este unitatea imaginară și n in N. Arătați că z este număr real, pentru orice număr natural n.

b) Fie numerele complexe z1, z2 și z3 cu proprietățile: z1 + z2 + z3 != 0, z1^2 + z2^2 + z3^2 = 0 și |z1| = |z2| = |z3| = 1. Demonstrați că |z1 + z2 + z3| = 2.

SOLUȚIE:

a) z in R <=> z = z-bar ....1p

z-bar = (3 + 5i)^4n + (5 + 3i)^4n = (3 - 5i)^4n + (5 - 3i)^4n = [(-i)(5 + 3i)]^4n + [(-i)(3 + 5i)]^4n = ....1p

= [(-i)^4]^n (5 + 3i)^4n + [(-i)^4]^n (3 + 5i)^4n = (3 + 5i)^4n + (5 + 3i)^4n = z ....1p

b) |zi| = 1 => |zi|^2 = 1 => zi · z-bar\_i = 1 => z-bar\_i = 1/zi, for i in {1,2,3} ....1p

(z1 + z2 + z3)^2 = z1^2 + z2^2 + z3^2 + 2z1z2 + 2z1z3 + 2z2z3 = 2(z1z2 + z1z3 + z2z3)

|z1 + z2 + z3|^2 = |(z1 + z2 + z3)^2| = 2|z1z2 + z1z3 + z2z3| (1) ....1p

$$|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| = \left| \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 z_2 z_3} \right| = \left| \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| =$$

$$|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3| \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

Din (1) și (2) obținem  $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2 \cdot |z_1 + z_2 + z_3| \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| \cdot (|z_1 + z_2 + z_3| - 2) = 0$

Dar  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| \neq 0 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2 \dots\dots\dots 1p$

**Subiectul 3.**

- a) *Arătați că  $(\lg 5)^3 + (\lg 20)^3 + (\lg 8) \cdot (\lg 0,25) = 2$  .*
- b) *Știind că  $a, b \in (0,1)$ , demonstrați că  $\log_a \left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \log_b \left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 2$  .*
- c) *Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația:  $\lg(4^{x-2} + 9) + \lg 2 \leq \lg(2^{x-2} + 1) + 1$  .*

**SOLUȚIE:**

- a)  $\lg 5 = \lg \left(\frac{10}{2}\right) = 1 - \lg 2$ ;  $\lg 20 = 1 + \lg 2$ ;  $\lg 8 = 3 \lg 2$ ;  $\lg 0,25 = \lg \frac{1}{4} = -2 \lg 2 \dots\dots\dots 1p$   
 $(1 - \lg 2)^3 + (1 + \lg 2)^3 + (3 \lg 2) \cdot (-2 \lg 2) = 2. \dots\dots\dots 1p$
- b) Folosind inegalitatea dintre media armonică și cea geometrică:  $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$  și monotonia funcției logaritmice cu bază subunitară pe  $(0, +\infty)$  obținem  $\log_a \left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \log_a b)$  și  
 $\log_b \left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \log_b a) \dots\dots\dots 1p$

$0 < a < 1 \Rightarrow \log_b a > \log_b 1 = 0$  și  $0 < b < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 = 0$ .

Utilizând inegalitatea mediilor:  $\frac{\log_a b + \log_b a}{2} \geq \sqrt{\log_a b \cdot \log_b a}$  obținem:

$\log_a \left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \log_b \left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 1 + \frac{\log_a b + \log_b a}{2} \geq 1 + \sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = 1+1=2 \dots\dots\dots 1p$

- c) Folosind monotonia funcției logaritmice cu bază supraunitară pe  $(0, +\infty)$ , inegalitatea  $\lg(4^{x-2} + 9) \cdot 2 \leq \lg(2^{x-2} + 1) \cdot 10$  devine  $4^{x-2} + 9 \leq 5 \cdot 2^{x-2} + 5 \Leftrightarrow 4^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 \leq 0 \dots\dots\dots 1p$   
 Notând  $t = 2^{x-2}$ ,  $t > 0$ , obținem  $t^2 - 5 \cdot t + 4 \leq 0 \Rightarrow t \in [1,4] \dots\dots\dots 1p$   
 $1 \leq 2^{x-2} \leq 2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [2,4] \dots\dots\dots 1p$

**Subiectul 4.**

- a) *O echipă de proiect este formată din 3 profesori și 5 elevi. În câte moduri se poate forma o delegație alcătuită din 5 persoane astfel încât ea să conțină cel puțin 3 elevi?*
- b) *Un autoturism se deplasează cu viteza de 90 km/h la vale, cu 72 km/h pe loc drept și cu 60 km/h la deal. În aceste condiții autoturismul a parcurs distanța de la Iași la Brașov în 5 ore, iar distanța de la Brașov la Iași în 4 ore. Aflați distanța de la Iași la Brașov.*

**SOLUȚIE:**

- a) Delegația poate conține doi profesori și trei elevi sau un profesor și patru elevi sau cinci elevi. Doi profesori pot fi aleși din trei profesori în  $C_3^2$  moduri. Pentru fiecare din aceste alegeri, cei trei elevi pot fi aleși în  $C_5^3$  moduri. Delegația formată din doi profesori și trei elevi poate fi aleasă în  $C_3^2 \cdot C_5^3$  moduri.  $\dots\dots\dots 1p$   
 Analog, delegația formată dintr-un profesor și patru elevi se poate forma în  $C_3^1 \cdot C_5^4$  moduri.  
 Delegația formată din cinci elevi se poate alege în  $C_3^0 \cdot C_5^5$  moduri.  $\dots\dots\dots 1p$   
 Delegația formată din cinci membri în care sunt cel puțin trei elevi se poate forma în  $C_3^2 \cdot C_5^3 + C_3^1 \cdot C_5^4 + C_3^0 \cdot C_5^5 = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 30 + 15 + 1 = 46$  moduri.  $\dots\dots\dots 1p$
- b)  $t = \frac{S}{v}$ , unde  $S$  reprezintă distanța parcursă de autoturism cu viteza constantă  $v$ , în intervalul de timp  $t$ .  
 Notăm cu  $x$  numărul de km parcurși la coborâre, cu  $y$  numărul de km parcurși pe loc drept și cu  $z$  numărul de km parcurși la urcare de la Iași la Brașov.  $\frac{x}{90} + \frac{y}{72} + \frac{z}{60} = 5$ .  $\dots\dots\dots 1p$   
 Dacă drumul este parcurs de la Brașov la Iași, atunci  $\frac{z}{90} + \frac{y}{72} + \frac{x}{60} = 4$ .  $\dots\dots\dots 1p$   
 $\left(\frac{x}{90} + \frac{x}{60}\right) + \frac{2y}{72} + \left(\frac{z}{60} + \frac{z}{90}\right) = 9 \Rightarrow \frac{5x}{180} + \frac{y}{36} + \frac{5z}{180} = 9$ .  $\dots\dots\dots 1p$   
 $x + y + z = 36 \cdot 9 = 324$ . Distanța de la Iași la Brașov este de 324 km.  $\dots\dots\dots 1p$



**CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**



**ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2024**

**FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**

**INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE  
Clasa a XI-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică**

**Subiectul 1.**

Fie mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \ln a & 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in (0; +\infty) \right\}$ .

- a) Demonstrați că produsul oricăror două matrice din mulțimea  $\mathcal{M}$  este o matrice din mulțimea  $\mathcal{M}$ .  
b) Determinați perechile de numere naturale nenule  $(m, n)$ , cu  $m > n$ , astfel încât pentru matricele  $M(m)$  și  $M(n)$  din mulțimea  $\mathcal{M}$ , să aibă loc relația:

$$\det(M(m) \cdot M(n)) - \det(M(m)) - \det(M(n)) = 2024.$$

- c) Determinați matricele  $M(a) \in \mathcal{M}$ , cu  $a \in \mathbb{N}^*$ , pentru care există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M^n(a) = M(4096)$ .

**SOLUȚIE:**

a) Fie  $M(x), M(y) \in \mathcal{M} \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \ln x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ \ln y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x \cdot y & 0 \\ \ln x + \ln y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots 1p$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x \cdot y & 0 \\ \ln(x \cdot y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x \cdot y) \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = M(x \cdot y) \left. \begin{matrix} \Rightarrow M(x \cdot y) \in \mathcal{M} \Rightarrow M(x) \cdot M(y) \in \mathcal{M} \dots\dots 1p \\ x, y \in (0; +\infty) \Rightarrow x \cdot y \in (0; +\infty) \end{matrix} \right\}$$

b)  $\det(M(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \ln x & 0 & 1 \end{vmatrix} = x$

$M(m) \cdot M(n) = M(m \cdot n) \Rightarrow \det(M(m) \cdot M(n)) - \det(M(m)) - \det(M(n)) = 2024 \Leftrightarrow m \cdot n - m - n = 2024 \dots\dots\dots 1p$

$m \cdot n - m - n + 1 = 2025 \Leftrightarrow (m - 1)(n - 1) = 2025$  și  $m > n \Rightarrow$

$(m, n) \in \{(2026, 2), (676, 4), (406, 6), (226, 10), (136, 16), (82, 26), (76, 28), \} \dots\dots\dots 1p$

c) Se demonstrează prin inducție  $M^n(a) = M(a^n)$ ,  $(\forall) M(a) \in \mathcal{M} \dots\dots\dots 1p$   
 $\Rightarrow M(a^n) = M(4096) \Rightarrow a^n = 4096.$

$4096 = 2^{12} \Rightarrow 4096$  se poate scrie ca putere de număr natural nenul doar ca  $4096^1, 64^2, 16^3, 8^4, 4^6, 2^{12} \dots\dots\dots 1p$

Astfel,  $M^1(4096) = M^2(64) = M^3(16) = M^4(8) = M^6(4) = M^{12}(2) = M(4096) \Rightarrow$  matricele sunt:

$M(2), M(4), M(8), M(16), M(64), M(4096) \dots\dots\dots 1p$

**Subiectul 2.**

Se consideră mulțimea de matrice  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

- a) Demonstrați că orice matrice din mulțimea  $M$  este inversabilă și că inversa aparține mulțimii  $M$ ;
- b) Demonstrați că soluția ecuației  $A(a) \cdot X = A(b)$ , unde  $X \in M_3(\mathbb{R})$  și  $A(a), A(b) \in M$ , este element al mulțimii  $M$ ;
- c) Calculați  $[A(2)]^{2024}$ .

**SOLUȚIE:**

- a) arată că  $\det A(x) = 1 \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \rightarrow A(x)$  inversabilă .....1p  
 calculează  $A^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} = A(-x) \in M$  .....1p
- b)  $A(a)$  inversabilă,  $A^{-1}(a) = A(-a), X = A(-a) \cdot A(b)$  .....1p  
 $X = A(-a + b) \in M$  .....1p
- c) deduce  $A^n(x) = A(nx), (\forall)x \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)n \geq 1$  .....1p  
 demonstrează prin inducție că  $A^n(x) = A(nx), (\forall)x \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)n \geq 1$ .....1p  
 calculează  $A^{2024}(2) = A(4048)$  .....1p

**Subiectul 3.**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3, & x \leq -1 \\ ax^2 + ax - 1, & x > -1 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}^*$ .

- a) Demonstrați că funcția  $f$  este continuă, oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}^*$ .
- b) Determinați numărul real nenul  $a$ , astfel încât funcția  $f$  să fie derivabilă în  $x_0 = -1$ .
- c) Demonstrați că funcția  $f$  are o singură rădăcină în intervalul  $I = [0; 2]$ , oricare ar fi  $a > \frac{1}{6}$ .

**SOLUȚIE:**

- a) i)  $f$  continuă pe intervalul  $(-\infty; -1)$  deoarece este funcție de gradul doi, elementară;
- ii)  $f$  continuă pe intervalul  $(-1; +\infty)$  deoarece este funcție de gradul doi, elementară;.....1p
- iii) în  $x_0 = -1$

$$\left. \begin{aligned} l_s &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 5x + 3) = -1 \\ l_d &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (ax^2 + ax - 1) = -1 \\ f(-1) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = -1$$

Din i), ii) și iii)  $\Rightarrow f$  continuă pe  $\mathbb{R}$ .....1p

b)  $f$  derivabilă în  $x_0 = -1 \Leftrightarrow f'_s(-1) = f'_d(-1)$

$$f'_s(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + 5x + 3 - (-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x + 4) =$$

3 .....1p

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{ax^2 + ax - 1 - (-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{ax^2 + ax}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{ax(x+1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} ax = -a \dots 1p$$

$$f'_s(-1) = f'_d(-1) \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow a = -3 \dots 1p$$

c)  $f|_{(-1; +\infty)} = ax^2 + ax - 1$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$  și  $a > 0 \Rightarrow f$  strict crescătoare pe  $[-\frac{1}{2}; +\infty) \Rightarrow f$  strict crescătoare pe  $[0; 2] \Rightarrow f$  injectivă  $\Rightarrow$  ecuația  $f(x) = 0$  are cel mult o soluție în intervalul  $[0; 2]$ .....1p

Funcția  $f$  continuă pe intervalul  $[0; 2] \Rightarrow f$  are proprietatea lui Darboux pe  $[0; 2]$

Cum  $f(0) \cdot f(2) = -1(6a - 1) = 1 - 6a < 0, (\forall)a > \frac{1}{6} \Rightarrow (\exists)x_0 \in (0; 2)$  astfel încât  $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$  soluție unică a ecuației  $f(x) = 0$  pe intervalul  $[0; 2] \Rightarrow x_0$  este singura rădăcină a funcției  $f$  pe intervalul  $[0; 2]$ .....1p

**Altă soluție:**

Ne interesează doar restricția funcției la intervalul  $I = [0; 2]: f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + ax - 1$ .

Cum  $f$  continuă și  $f(0) = -1, f(2) = 6a - 1 > 0$  .....1p

iar  $f'(x) = a(2x + 1) > 0, \forall a > \frac{1}{6}, \forall x \in [0, 2]$ , deci funcția este strict crescătoare pe  $[0, 2]$ ,

rezultă că avem o singură soluție în intervalul  $I = [0; 2]$  .....1p

**Subiectul 4.**

Transpusă într-un sistem de axe ortogonale, o șosea e situată pe o curbă de ecuație  $y = \sqrt{x + 1}$  și unește orașele  $A, B, C$  și  $D$  care au abscisele  $0, 3, a$  și  $b$ , cu  $0 < a < b$ . Prin orașul  $C$  este construită o autostradă care este tangentă la șosea și este paralelă cu dreapta determinată de orașele  $A$  și  $B$ .

a) Aflați coordonatele orașului  $C$ ;

b) Determinați abscisa orașului  $D$ , știind că aria suprafeței de teren cuprinsă între orașele  $A, B$  și  $D$  este de  $3 \text{ (u. m)}^2$ .

**SOLUȚIE:**

a) Află  $A(0, 1), B(3, 2); m_{AB} = \frac{1}{3}; m_t = m_{AB}$ , .....1p

Definește  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 1}$  funcție derivabilă

Calculează  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}; f'(a) = \frac{1}{3}$  .....1p

Determină  $C(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$  .....1p

b) Obține  $|\Delta| = 6, \Delta = \pm 6$  .....1p

Calculează  $\Delta = 3\sqrt{b + 1} - b - 3$  .....1p

Cazul I :  $\Delta = 6 \rightarrow$  nu există soluții .....1p

cazul II:  $\Delta = -6 \rightarrow$  obține  $b_1 = 0, b_2 = 6$ ; soluție  $b = 15$  .....1p





INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI



MINISTERUL EDUCAȚIEI



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2024

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE  
Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

**Subiectul 1.**

Pe mulțimea  $M = [1, \infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  
 $x * y = \log_3(3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12)$ .

a) Arătați că  $x * y = \log_3((3^x - 3)(3^y - 3) + 3)$  pentru orice  $x, y \in M$ .

b) Să se rezolve în mulțimea  $M$  ecuația  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x} = x$ .

c) Pe o tablă sunt scrise numerele  $\frac{\sqrt{50}}{4}, \frac{\sqrt{49}}{4}, \frac{\sqrt{48}}{4}, \dots, \frac{\sqrt{16}}{4}$ . Se șterg două numere  $a$  și  $b$  și în locul lor se trece numărul  $a * b$ .

Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?

**SOLUȚIE:**

a)  $3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12 = 3^x(3^y - 3) - 3(3^y - 3) + 3 = (3^x - 3)(3^y - 3) + 3$  și finalizare .....1p

b)  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x} = x \Leftrightarrow \log_3((3^x - 3)^{11} + 3) = x$ .....1p

Obține  $(3^x - 3)((3^x - 3)^{10} - 1) = 0$  .....1p

Găsește  $x = 1$  și  $x = \log_3 4$ , care convin și  $x = \log_3 2 < 1$ , care nu convine.....1p

c) Demonstrează că ultimul număr este  $x = \log_3((3^{x_1} - 3)(3^{x_2} - 3) \dots (3^{x_{35}} - 3) + 3)$  unde  $x_i, i = \overline{1, 35}$  sunt numerele de pe tablă.....1p

Observă că  $x_{35} = 1$ .....1p

Determină  $x=1$ .....1p

**Subiectul 2.**

Se consideră polinomul  $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1 \in \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g = (X - 1)^2$ .

b) Fie funcția  $g: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{(x-1)^2}$ , unde  $\tilde{f}(x)$  este funcția polinomială asociată polinomului  $f$ . Determinați primitiva funcției  $g$  al cărei grafic conține punctul  $M(2, 2^{n+1})$ .

### SOLUȚIE:

- a) Folosește schema lui Horner de două ori consecutiv și obține  $r=0$ .....2p  
Determină câtul  $q = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \dots + 2X + 1$ .....1p  
b) Determină primitivele funcției  $g: G(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + C = x \frac{x^n-1}{x-1} + C, C \in \mathbb{R}$ .....2p  
Din  $G(2) = 2^{n+1}$  obține  $C=2$  și finalizează.....2p

### Subiectul 3.

$$\text{Fie } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x} dx \text{ și } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx.$$

- a) Demonstrați că  $2I + 3J = \frac{\pi}{2}$ .  
b) Calculați valoarea integralei  $J$ .  
c) Să se arate că  $I \leq \frac{\pi}{4}$ .

### SOLUȚIE:

- a)  $2I + 3J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ .....1p  
b) Observă că  $(2\sin x + 3\cos x)' = 2\cos x - 3\sin x$ .....1p  
Calculează  $2J - 3I = \ln \frac{2}{3}$ .....1p  
Determină  $J = \frac{1}{13} \left( \frac{3\pi}{2} + 2\ln \frac{2}{3} \right)$ .....1p  
c) Consideră funcția continuă  $f(x) = \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x}, f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  și calculează  $f'(x) = \frac{3}{(2\sin x + 3\cos x)^2}$ .....1p  
Demonstrează că  $f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow I \leq \frac{\pi}{4}$ .....2p

### Subiectul 4.

Costul total de cumpărare și întreținere al unui aparat medical pentru  $x$  ani ( $x > 1$ ) este modelat prin funcția  $C(x) = 4000 \left( 30 + \int_0^x t \cdot 3^t dt \right)$ , (exprimată în RON).

- a) Calculați costul total pentru patru ani de folosire a aparatului (aproximați  $\ln 3$  cu 1).  
b) După câți ani de folosire a aparatului suma cheltuită este egală cu  $4000(729x - 698)$ .

### SOLUȚIE:

- a) Calculează  $\int_0^4 t \cdot 3^t dt = 244$ .....2p  
Calculează  $C(4) = 1096000$ .....1p  
b) Calculează  $C(x) = 4000(31 + 3^x(x-1))$ .....2p  
Obține ecuația  $(x-1)(3^x - 729) = 0$  de unde determină  $x=6$ , care convine.....2p