MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a XII-a – soluții și barem orientativ de corectare

Problema 1. *Determinați numerele naturale n, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care ecuația*

$$x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0} \tag{1}$$

are o unică soluție în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

Gazeta Matematică

Soluție. Vom nota cu M mulțimea numerelor naturale n, cu $n \geq 2$, pentru care ecuația (1) are o unică soluție în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.
Vom arăta că $M = \{11\}$.
În inelul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, ecuația (1) se scrie echivalent

$$x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0} \Longleftrightarrow x^2 - \widehat{14} \cdot x + \widehat{49} = \hat{0} \Longleftrightarrow (x - \hat{7})^2 = \hat{0}\,,$$

cu soluția unică $x = \hat{7}$. Prin urmare, $11 \in M$. **1p**
Deoarece $k^2 - 3k + 5 = (k-1)(k-2) + 3$ este un număr impar pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, ecuația $x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0}$ nu are soluții în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ pentru niciun n par, astfel că $M \subseteq 2 \cdot \mathbb{N} + 1$.
.... **1p**
Fie $n \in M$ oarecare, iar $x \in \mathbb{Z}_n$ soluția unică a ecuației (1). Pentru elementul $y = \hat{3} - x$ avem atunci

$$y^2 - \hat{3} \cdot y + \hat{5} = \hat{9} - \hat{6} \cdot x + x^2 - \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{3} \cdot x + \hat{5} = x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0}\,,$$

astfel că y este soluție a ecuației (1). Din condiția de unicitate rezultă atunci că $x = y = \hat{3} - x$, sau, echivalent, $\hat{2} \cdot x = \hat{3}$. Deoarece n este impar, $\hat{2}$ este inversabil, și obținem că $x = \hat{3} \cdot \hat{2}^{-1}$.
.... **2p**
Faptul că $x = \hat{3} \cdot \hat{2}^{-1}$ este soluție a ecuației se transcrie echivalent, ținând cont de faptul că n este impar:

$$(\hat{3} \cdot \hat{2}^{-1})^2 - \hat{3} \cdot (\hat{3} \cdot \hat{2}^{-1}) + \hat{5} = \hat{0} \Longleftrightarrow \hat{4} \cdot ((\hat{3} \cdot \hat{2}^{-1})^2 - \hat{3} \cdot (\hat{3} \cdot \hat{2}^{-1}) + \hat{5}) = \hat{0} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \hat{9} - \widehat{18} + \widehat{20} = \hat{0} \Longleftrightarrow \widehat{11} = \hat{0} \Longleftrightarrow n | 11.$$

Cum $n \geq 2$, rezultă atunci că $n = 11$. Prin urmare, $M \subseteq \{11\}$. **2p**
Din $11 \in M \subseteq \{11\}$ rezultă atunci că $M = \{11\}$. **1p**

Problema 2. *Fie $f : [0,1] \longrightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă pe $[0,1]$, iar $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.*

a) Arătați că funcția $F : [0,1] \longrightarrow [0, A]$, definită pentru orice $x \in [0,1]$ prin

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,,$$

este inversabilă, cu inversa derivabilă.
b) Arătați că există o unică funcție $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$*, astfel încât egalitatea*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_{g(x)}^1 f(t)\,dt \tag{2}$$

să aibă loc pentru orice $x \in [0,1]$*.*
c) Arătați că există $c \in [0,1]$ *pentru care*

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)-c}{x-c} = -1,$$

unde g *este funcția unic determinată prin relația* (2)*.*

Soluție. a) Deoarece f este continuă, F este continuă și derivabilă, cu $F'(x) = f(x) > 0$, pentru orice $x \in [0,1]$. Prin urmare, F este strict crescătoare, deci injectivă. Fiind continuă, F are proprietatea valorilor intermediare ("a lui Darboux" - termen folosit doar în România), și cum $F(0) = 0$ și $F(1) = A$, F este surjectivă. Prin urmare, F este bijectivă, deci inversabilă. În plus, deoarece $F'(x) = f(x) > 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, F^{-1} este derivabilă, cu

$$\left(F^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f(F^{-1}(x))}\,, \qquad \text{pentru orice } x \in [0,A]\,.$$

....**1p**
b) Egalitatea din enunț $\int_0^x f(t)\,dt = \int_{g(x)}^1 f(t)\,dt$ devine $F(x) = F(1) - F(g(x)) = A - F(g(x))$, sau, echivalent, $F(g(x)) = A - F(x)$, pentru orice $x \in [0,1]$ **1p**
Funcția F fiind crescătoare, rezultă că $A - F(x) \in [0,A]$, pentru orice $x \in [0,1]$, astfel că funcția $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, definită prin $g(x) = F^{-1}(A - F(x))$ pentru orice $x \in [0,1]$, este bine definită și unică cu proprietatea (2).. **2p**
c) Cum funcțiile F și F^{-1} sunt derivabile, funcția g definită mai sus este derivabilă și

$$g'(x) = \frac{(A - F(x))'}{f\left(F^{-1}(A - F(x))\right)} = \frac{-f(x)}{f\left(F^{-1}(A - F(x))\right)}\,, \qquad \text{pentru orice } x \in [0,1]. \tag{3}$$

Funcția g este strict descrescătoare, astfel că are un unic punct fix $c \in [0,1]$.
Pentru acesta avem: $2F(c) = F(c) + F(g(c)) = A$, astfel că $F(c) = \frac{1}{2} \cdot A$ și $c = F^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot A\right)$.
....**2p**
Deoarece g este derivabilă, există limita

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)-c}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = g'(c)\,,$$

iar această limită este

$$g'(c) = \frac{-f(c)}{f(F^{-1}(A - F(c))} = \frac{-f(c)}{f(c)} = -1.$$

....**1p**

Problema 3. *Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Spunem că inelul $(A, +, \cdot)$ are proprietatea $CP(k)$, dacă pentru orice $a, b \in A$ există $c \in A$, astfel încât $a^k = b^k + c^k$.*
a) Dați un exemplu de inel finit $(A, +, \cdot)$, care nu are proprietatea $CP(k)$ pentru niciun număr natural k, cu $k \geq 2$.
b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $M(n) = \{m \in \mathbb{N}^* | (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ are proprietatea $CP(m)\}$. Demonstrați că $M(n)$ este un monoid în raport cu operația de înmulțire, inclus în mulțimea $2 \cdot \mathbb{N} + 1$ a numerelor naturale impare.

Soluție. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ notăm $P_k(A) = \{a^k \,|\, a \in A\}$. Condiția $CP(k)$ este atunci echivalentă cu

$$x - y \in P_k(A)\,, \quad \text{pentru orice } x, y \in P_k(A)\,,$$

adică $P_k(A)$ este un subgrup al grupului aditiv $(A, +)$. **1p**
a) Pentru $A = \mathbb{Z}_4$, avem că $P_{2k}(A) = \{\hat{0}, \hat{1}\}$, respectiv $P_{2k+1}(A) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Acestea nu sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$. Prin urmare, inelul $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ nu are proprietatea $CP(k)$ pentru niciun $k \in \mathbb{N}$, cu $k \geq 2$. **2p**
b) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, considerăm inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$. Deoarece $\hat{1} \in P_k(\mathbb{Z}_n)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, și $(\mathbb{Z}_n, +)$ este ciclic, generat de $\hat{1}$, rezultă că $CP(k) \iff P_k(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$. Echivalent, $CP(k) \iff$ funcția $p_k : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, definită prin $p_k(x) = x^k$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}_n$, este bijectivă.
Putem atunci rescrie $M(n) = \{m \in \mathbb{N}^* | \, p_m$ este bijectivă$\}$.
Deoarece pentru k par avem că $p_k(\hat{1}) = p_k(-\hat{1})$, iar $\hat{1} \neq -\hat{1}$, rezultă că orice $m \in M(n)$ este impar, astfel că $M(n) \subseteq 2 \cdot \mathbb{N} + 1$.
. . . . **2p**
Deoarece $p_1 = id_{\mathbb{Z}_n}$ este bijectivă, avem că $1 \in M(n)$.
Fie $m_1, m_2 \in M(n)$ oarecare. Funcțiile p_{m_1} și p_{m_2} sunt bijective, iar funcția $p_{m_1 m_2} = p_{m_1} \circ p_{m_2}$ este bijectivă, fiind compusa a două funcții bijective, astfel că $m_1 \cdot m_2 \in M(n)$.
Rezultă că $M(n)$ este un submonoid al monoidului $(\mathbb{N}^*, \cdot)$. **2p**

Problema 4. *Fie $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(0) = 0$, iar $0 \leq f'(x) \leq 1$ pentru orice $x > 0$. Demonstrați că*

$$\int_0^a f(t)^{2n+1}\, dt \leq (n+1) \cdot \left(\int_0^a f(t)^n \, dt \right)^2 ,$$

pentru orice $a > 0$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Deoarece $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \geq 0$, funcția f este monoton crescătoare, astfel că $f(x) \geq f(0) = 0$, pentru orice $x \geq 0$. **1p**
Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixat și funcția $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pentru orice $x \geq 0$ prin

$$F(x) = (n+1) \cdot \left(\int_0^x f(t)^n \, dt \right)^2 - \int_0^x f(t)^{2n+1} \, dt\,.$$

Vom arăta că F este monoton crescătoare, ceea ce, cum $F(0) = 0$, va demonstra inegalitatea din enunț.

Funcția f fiind continuă, F este derivabilă și

$$F'(x) = 2(n+1) \cdot \left(\int_0^x f(t)^n \, dt \right) \cdot f(x)^n - f(x)^{2n+1} =$$

$$= f(x)^n \cdot \left(2(n+1) \cdot \left(\int_0^x f(t)^n \, dt \right) - f(x)^{n+1} \right) .$$

....**2p**

Deoarece $f'(x) \leq 1$ pentru orice $x \geq 0$, avem că $f(x)^n \geq f(x)^n \cdot f'(x)$, $\forall x \geq 0$, astfel că

$$(n+1) \cdot \left(\int_0^x f(t)^n \, dt \right) \geq \int_0^x (n+1) \cdot f(t)^n \cdot f'(t) \, dt = f(x)^{n+1} .$$

....**2p**

Rezultă că

$$F'(x) = f(x)^n \cdot \left(2(n+1) \cdot \left(\int_0^x f(t)^n \, dt \right) - f(x)^{n+1} \right) \geq$$

$$\geq f(x)^n \cdot \left(2 \cdot f(x)^{n+1} - f(x)^{n+1} \right) = f(x)^{2n+1} \geq 0 ,$$

pentru orice $x \geq 0$. Astfel, F este crescătoare, și deci $F(x) \geq F(0) = 0$ pentru orice $x \geq 0$. Obținem astfel inegalitatea din enunț...**2p**