Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a IX-a

Barem de notare şi evaluare

● Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

● Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.

a) Să se calculeze suma:

$$S_1 = [\sqrt{2 \cdot 5}] + [\sqrt{3 \cdot 6}] + [\sqrt{4 \cdot 7}] + \cdots + [\sqrt{2022 \cdot 2025}]$$

Se observă că $n + 1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n + 2$, prin ridicare la pătrat: $2n + 1 \leq 3n < 4n + 4$ evident, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ……………**1p**

Deci, $\left[\sqrt{n(n+3)}\right] = n + 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$……………………………………………………..**1p**

$S = 3 + 4 + 5 + \cdots + 2023 = 2023 \cdot 1012 - 3 = 2047273$ ……………………………**1p**

b) Să se calculeze suma:

$$S_2 = [1 + \sqrt{2}] + \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right] + \left[\frac{3 + \sqrt{4}}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2024 + \sqrt{2025}}{2024}\right]$$

Folosim $[a + k] = [a] + k,\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$ și

$S_2 = 1 + [\sqrt{2}] + 1 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 1 + \left[\frac{\sqrt{4}}{3}\right] + \cdots + 1 + \left[\frac{\sqrt{2025}}{2023}\right]$ ……………………………………………**2p**

Cum $0 < \frac{\sqrt{k}}{k+1} < 1,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ și $k \geq 3$,………………………………………………….**1p**

$S_2 = 2024 + 1 = 2025$…………………………………………………………………...…**1p**

Problema 2

Numerele reale x, y, zverifică simultan relaţiile: $x + y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

Să se demonstreze că $x^{2025} + y^{2025} \in \mathbb{Z}$.

Se demonstrează că $x^n + y^n \in \mathbb{Z}$, pentru orice număr natural n.

Pentru $n = 0, n = 1$, propoziţia este adevărată..**1p**

Presupunem că $x^k + y^k \in \mathbb{Z}$, pentru orice număr natural $k \leq n$ şi demonstrăm că $x^{n+1} + y^{n+1} \in \mathbb{Z}$.

Din $x^n + y^n \in \mathbb{Z}$ şi $x + y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $(x^n + y^n)(x + y) \in \mathbb{Z}$......................................**2p**

adică $x^{n+1} + x^n \cdot y + x \cdot y^n + y^{n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^{n+1} + y^{n+1} + x \cdot y \cdot (x^{n-1} + y^{n-1}) \in \mathbb{Z}$...**2p**

dar $x^{n-1} + y^{n-1} \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $x^{n+1} + y^{n+1} \in \mathbb{Z}$..**1p**

Pentru $n = 2025$, rezultă concluzia..**1p**

Problema 3

Soluţie Notăm. $\frac{BM}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB} = k,\ k > 0$. Fie O un punct arbitrar al planului.

Avem $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{k+1}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OA}}{k+1}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k+1}$,..**1p**

G_1 este centrul de greutate al triunghiului ABM, rezultă $\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}}{3}$, şi analog $\overrightarrow{OG_2} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON}}{3}$, $\overrightarrow{OG_3} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}}{3}$ **1p**

Fie G centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$. Rezultă că $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3}}{3}$, deci

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}}{3} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON}}{3} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}}{3}}{3} = \frac{2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}}{9}$$

Dar $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{k+1} + \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OA}}{k+1} + \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k+1} = \frac{(k+1)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}{k+1}$, de unde rezultă $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ **3p**

Rezultă că $\overrightarrow{OG} = \frac{2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{9} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$, oricare ar fi punctul O din plan, deci G este centrul de greutate al triunghiului ABC **2p**

Problema 4

Soluţie a) Obţinerea inegalităţii $xy+yz+xz \le x^2+y^2+z^2$ şi finalizare........................**1p**

b) Avem $\dfrac{a^6}{a^4+b}=\dfrac{a^6+a^2b-a^2b}{a^4+b}=\dfrac{a^2\left(a^4+b\right)-a^2b}{a^4+b}=a^2-\dfrac{a^2b}{a^4+b}$ **1p**

Dar $a^4+b\ge 2a^2\sqrt{b}$, deci $\dfrac{a^2b}{a^4+b}\le\dfrac{a^2b}{2a^2\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ **2p**

Rezultă că $\dfrac{a^6}{a^4+b}\ge a^2-\dfrac{\sqrt{b}}{2}$, şi alte două inegalităţi analoage. Prin adunarea lor, rezultă că

$$\frac{a^6}{a^4+b}+\frac{b^6}{b^4+c}+\frac{c^6}{c^4+a}\ge a^2+b^2+c^2-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}.$$

Dar $\left(a+b+c\right)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, deci $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=\dfrac{12^2}{3}=48$, iar $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le 3\left(a+b+c\right)=36$, deci $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le 6$. Rezultă că

$\dfrac{a^6}{a^4+b}+\dfrac{b^6}{b^4+c}+\dfrac{c^6}{c^4+a}\ge 48-\dfrac{6}{2}=45$..**2p**

Egalitatea nu poate avea loc, ar însemna ca $a=b=c=4$, dar şi $a^2=\sqrt{b}$ si analoagele, contradicţie..**1p**