Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a IX-a

Problema 1.

a) Să se calculeze suma:

$$S_1 = [\sqrt{2 \cdot 5}] + [\sqrt{3 \cdot 6}] + [\sqrt{4 \cdot 7}] + \cdots + [\sqrt{2022 \cdot 2025}]$$

b) Să se calculeze suma:

$$S_2 = [1 + \sqrt{2}] + \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right] + \left[\frac{3 + \sqrt{4}}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2024 + \sqrt{2025}}{2024}\right]$$

Problema 2

Numerele reale x, y verifică simultan relaţiile: $x + y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

Să se demonstreze că $x^{2025} + y^{2025} \in \mathbb{Z}$.

Problema 3

Se consideră un triunghi ABC şi punctele M, N, P pe laturile BC, CA, AB, astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABM, BCN, respectiv CAP. Demonstraţi că triunghiurile $G_1G_2G_3$ şi ABC au acelaşi centru de greutate.

S.G.M. nr. 10/2024

Problema 4

a) Să se demonstreze că $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, oricare ar fi numerele reale x, y, z.

b) Dacă $a, b, c \in (0; +\infty)$ şi $a+b+c=12$, să se demonstreze că $\frac{a^6}{a^4+b} + \frac{b^6}{b^4+c} + \frac{c^6}{c^4+a} > 45$.

Notă: *Timp de lucru: 3 ore*
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte