Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

● Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

● Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.

Dacă a, b, c sunt numere reale și $2\left(2a\sqrt{3}-b\sqrt{15}+3c\sqrt{2}\right)=a^2+b^2+c^2+45$, calculați $(a^2+b^2+c^2)^2$.

Soluție:

După desfacerea parantezelor și regruparea termenilor se obține:

$a^2+b^2+c^2+45-4a\sqrt{3}+2b\sqrt{15}-6c\sqrt{2}=0$...**2p**

relație echivalentă cu $a^2-4a\sqrt{3}+12+b^2+2b\sqrt{15}+15+c^2-6c\sqrt{2}+18=0$ **2p**

$\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+\left(b+\sqrt{15}\right)^2+\left(c-3\sqrt{2}\right)^2=0$ **1p**

Egalând fiecare expresie din paranteze cu 0 se obțin $a=2\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{15}$, $c=3\sqrt{2}$...........**1p**

Astfel, $(a^2+b^2+c^2)^2=(12+15+18)^2=45^2=2025$...**1p**

Problema 2.

Fie $a,\ b,\ c$ numere raţionale nenule astfel încât $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$ şi $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Arătaţi că valoarea expresiei $E=\frac{a(2a+7)}{b+c}+\frac{b(2b+7)}{c+a}+\frac{c(2c+7)}{a+b}$ este număr natural prim.

G.M. nr.10/ 2024

Soluție:

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1 \Rightarrow \frac{a}{b+c}=1-\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{b+c}=a-\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ac}{a+b}\right).$

Analog, obţinem:

$\frac{b^2}{c+a} = b - \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ba}{b+c}\right)$ şi $\frac{c^2}{a+b} = c - \left(\frac{ca}{b+c} + \frac{cb}{c+a}\right)$..**2p**

Adunând relaţiile membru cu membru, va rezulta:

$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = (a+b+c) - \left(\frac{ab+cb}{c+a} + \frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ba+ca}{b+c}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$............**2p**

$E = \frac{a(2a+7)}{b+c} + \frac{b(2b+7)}{c+a} + \frac{c(2c+7)}{a+b} = 2\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) + 7\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \Leftrightarrow E = 7,$

prin urmare, valoarea expresiei date este număr prim..**3p**

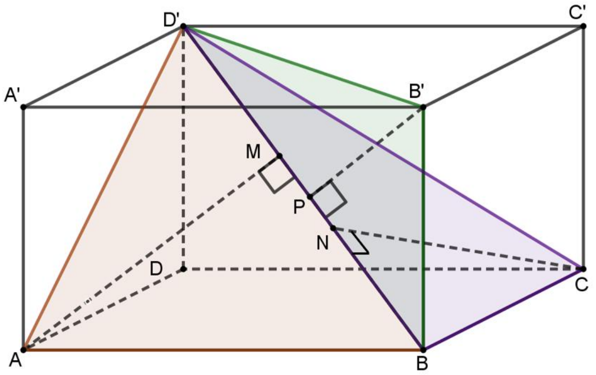
Problema 3.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipiped dreptughic și M, N, P proiecțiile punctelor A, C respectiv B' pe diagonala BD'.

a) Arătați că $BM + BN + BP = BD'$.

b) Demonstrați că $3(AM^2 + B'P^2 + CN^2) \geq 2(BD')^2$ dacă și numai dacă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Soluție:



a) Aplicând teorema catetei în triunghiurile $ABD', D'B'B$ și $D'CB$, obținem

$BM = \frac{AB^2}{BD'}, BP = \frac{B'B^2}{BD'}$ și $BN = \frac{BC^2}{BD'}$..**1p**

De unde $BM + BN + BP = \frac{AB^2}{BD'} + \frac{B'B^2}{BD'} + \frac{BC^2}{BD'} = \frac{(BD')^2}{BD'} = BD'$...**1p**

b) Pentru implicația direct notăm $AB = L, BC = l, AA' = h$. Aplicând teorema înălțimii, prin

ridicare la pătrat, obținem relațiile: $AM^2 = \frac{AB^2 \cdot (AD')^2}{(BD')^2} = \frac{L^2l^2 + L^2h^2}{L^2+l^2+h^2}, B'P^2 = \frac{(B'D')^2 \cdot B'B^2}{(BD')^2} =$

$= \frac{h^2L^2 + h^2l^2}{L^2+l^2+h^2}, CN^2 = \frac{D'C^2 \cdot CB^2}{(BD')^2} = \frac{l^2L^2 + l^2h^2}{L^2+l^2+h^2}$..**2p**

Inegalitatea devine $6\frac{L^2l^2+l^2h^2+h^2L^2}{L^2+l^2+h^2} \geq 2(L^2+l^2+h^2)$, adică

$(L^2-l^2)^2+(l^2-h^2)^2+(h^2-L^2)^2 \leq 0$...**2p**

Se deduce $L=l=h$.

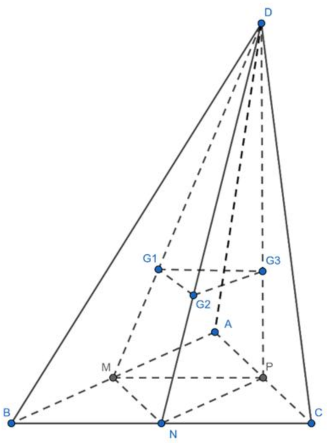
Pentru implicația inversă notând cu l lungimea muchiei cubului, se obține $AM = B'P = CN$= $=\frac{l\sqrt{6}}{3}$ şi inegalitatea se verifică cu egalitate: $6l^2 \geq 6l^2$ ……….………………..……………..… **1p**

Problema 4.

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DAB, DBC, respectiv DCA.

a) Demonstraţi că planele $(G_1G_2G_3)$ şi (ABC) sunt paralele.
b) Să se calculeze aria triunghiului $G_1G_2G_3$ ştiind că lungimile laturilor triunghiului ABC, $AB=c, BC=a, CA=b$ verifică egalitatea: $a+b+c+ab+ac+bc=6\sqrt{abc}$.

Soluție:



a) Fie M, N, P mijloacele laturilor $AB,\ BC$, respectiv ACale triunghiului ABC.

În ΔABD: DMmediană şi G_1 centru de greutate $\Rightarrow$ (1) $G_1 \in DM$şi $\frac{DG_1}{G_1M}=2$.

În ΔDBC: DNmediană şi G_2 centru de greutate $\Rightarrow$ (2) $G_2 \in DN$şi $\frac{DG_2}{G_2N}=2$.

În ΔDAC: DPmediană şi G_3 centru de greutate $\Rightarrow$ (3) $G_3 \in DP$şi $\frac{DG_3}{G_3P}=2$............................**1p**

Din (1) şi (2) rezultă $G_1G_2 \parallel MN$ şi $\frac{G_1G_2}{MN}=\frac{2}{3}$.

Din (2) şi (3) rezultă $G_2G_3 \parallel NP$ şi $\frac{G_2G_3}{NP}=\frac{2}{3}$...**1p**

$$\left.\begin{array}{l} G_1G_2 \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \end{array}\right\} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (MNP)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_2G_3 \parallel NP \\ NP \subset (MNP) \end{array}\right\} \Rightarrow G_2G_3 \parallel (MNP)$$

Dar G_1G_2 şi G_2G_3 sunt drepte concurente situate în planul $(G_1G_2G_3)$. De aici rezultă $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$..**1p**

b) Din (1) şi (3) rezultă $G_1G_3 \parallel MP$ şi $\frac{G_1G_3}{MP} = \frac{2}{3}$.

În acest caz, (4) $\frac{G_1G_2}{MN} = \frac{G_2G_3}{NP} = \frac{G_3G_1}{PM} = \frac{2}{3}$.

ΔMNP este triunghiul median al ΔABC, deci $\Delta MNP \sim \Delta ABC$şi (5) $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{BA} = \frac{PM}{CB} = \frac{1}{2}$.

Din (4) şi (5) rezultă $\frac{G_1G_2}{AC} = \frac{G_2G_3}{BA} = \frac{G_3G_1}{CB} = \frac{1}{3}$...**1p**

În ΔABC, lungimile laturilor verifică relaţia $a + b + c + ab + ac + bc = 6\sqrt{abc}$, care se rescrie $a - 2\sqrt{abc} + bc + b - 2\sqrt{abc} + ac + c - 2\sqrt{abc} + ab = 0$, echivalent cu $\left(\sqrt{a} - \sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{ac}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{ab}\right)^2 = 0$, de unde $a = bc, b = ac, c = ab$...........**2p**

În final, $a = b = c = 1$, iar $G_1G_2 = G_2G_3 = G_3G_1 = \frac{2}{3}$. Prin urmare, triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral, iar aria acestuia este $A_{G_1G_2G_3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$..**1p**