Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a VIII-a

Problema 1.

Dacă a, b, c sunt numere reale și $2(2a\sqrt{3} - b\sqrt{15} + 3c\sqrt{2}) = a^2 + b^2 + c^2 + 45$, calculați $(a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Problema 2.

Fie a, b, c numere raţionale nenule astfel încât $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$, $c+a \neq 0$ şi $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$.

Arătaţi că valoarea expresiei: $E = \frac{a(2a+7)}{b+c} + \frac{b(2b+7)}{c+a} + \frac{c(2c+7)}{a+b}$ este număr natural prim.

G. M. nr.10/2024

Problema 3.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipiped dreptughic și M, N, P proiecțiile punctelor A, C respectiv B' pe diagonala BD'.

a) Arătați că $BM + BN + BP = BD'$.

b) Demonstrați că $3(AM^2 + B'P^2 + CN^2) \geq 2(BD')^2$ dacă și numai dacă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Problema 4.

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DAB, DBC, respectiv DCA.

a) Demonstraţi că planele $(G_1G_2G_3)$ şi (ABC) sunt paralele.

b) Să se calculeze aria triunghiului $G_1G_2G_3$ ştiind că lungimile laturilor triunghiului ABC, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ verifică egalitatea: $a + b + c + ab + ac + bc = 6\sqrt{abc}$.

Notă: *Timp de lucru: 3 ore*
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte