



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15 februarie 2025

Clasa a -VII-a

Barem de notare și evaluare

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

### Problema 1.

Din inegalitatea mediilor  $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$ , unde  $x, y$  numere reale pozitive,

obținem  $\frac{x+y}{\sqrt{x \cdot y}} \geq 2$ , (1) .....2p

Utilizând inegalitatea (1), obținem:  $\frac{1+2}{\sqrt{1 \cdot 2}} \geq 2$ ,  $\frac{2 \cdot (2+3)}{\sqrt{2 \cdot 3}} \geq 2 \cdot 2$ ,  $\frac{3 \cdot (3+4)}{\sqrt{3 \cdot 4}} \geq 3 \cdot 2, \dots$ ,

$\frac{2024 \cdot (2024+2025)}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} \geq 2024 \cdot 2$  .....2p

$A = \frac{1+2}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{2 \cdot (2+3)}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{3 \cdot (3+4)}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \frac{4 \cdot (4+5)}{\sqrt{4 \cdot 5}} + \dots + \frac{2024 \cdot (2024+2025)}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} \geq$

$\geq 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + \dots + 2024 \cdot 2$  .....1p

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + \dots + 2024 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} > 2024^2$  .....1p

Deci  $A = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{6}} + \frac{21}{\sqrt{12}} + \frac{36}{\sqrt{20}} + \dots + \frac{2024 \cdot 4049}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} > 2024^2$  .....1p

### Problema 2.

a)  $6 < \sqrt{42} < \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots \sqrt{42}}}$ , dar  $\sqrt{42} < \sqrt{49} = 7$  .....1p

obținem  $\sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots \sqrt{42}}} < \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots \sqrt{49}}} = \dots = \sqrt{42 + 7} = 7$

$\Rightarrow 6 < a < 7 \Rightarrow [a] = 6$  .....2p

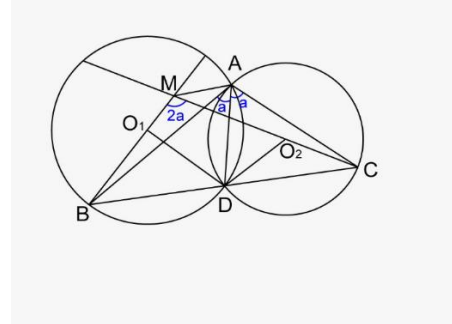
b)  $b = 2(4 + \sqrt{3}) - |3 - 2\sqrt{3}| - (3^{82} - 2^{123} + 2^{123}) : 3^{80}$  .....1p

$\Rightarrow b = 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3 - 3^2 \Rightarrow b = 2$  .....1p

$\sqrt{\frac{x \cdot [a] - 3}{x \cdot b + 5}} = \sqrt{\frac{6x - 3}{2x + 5}} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6x - 3}{2x + 5} = k^2, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6x - 3}{2x + 5} = 3 - \frac{18}{2x + 5} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{18}{2x + 5} \in \mathbb{Z}$  .....1p

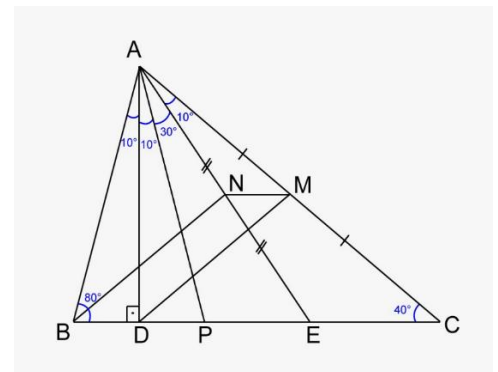
$\Rightarrow 2x + 5 \in \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ,  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-7, -4, -3, -2, -1, 2\}$ ,  
dar cum  $3 - \frac{18}{2x+5} = k^2$ , vom obține  $x \in \{-4, 2\}$ . .....1p

### Problema 3.



Notăm  $\sphericalangle BAC = 2a$ , cum AD bisectoarea  $\sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = a \Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{DC} = 2a$  .....2p  
 $\sphericalangle BO_1D = \sphericalangle CO_2D = 2a$ , iar  $\Delta BO_1D$  și  $\Delta CO_2D$  sunt triunghiuri isoscele,  $BO_1 = O_1D$  și  $DO_2 = O_2C \Rightarrow$   
 $\sphericalangle O_1BD = \sphericalangle O_2CD = 90^\circ - a$  .....2p  
 cum  $BO_1 \cap CO_2 = \{M\} \Rightarrow \Delta BMC$  isoscel,  $BM = MC$  .....1p  
 Cum  $\Delta BMC$  isoscel,  $\sphericalangle BMC = 2a = \sphericalangle BAC \Rightarrow$  patrulaterul MACB este inscripabil,  
 deci A, B, C și M sunt puncte conciclice. ....2p

### Problema 4.



**a)**  $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ , dar  $\sphericalangle DAB = 10^\circ$   
 $\Rightarrow \sphericalangle ADB = 90^\circ \Rightarrow AD$  – înălțime și mediană în  $\Delta ABP \Rightarrow AP=AB$  .....1p  
 În  $\Delta APC$ ,  $\sphericalangle APC = 100^\circ$  și  $\sphericalangle ACB = 40^\circ \Rightarrow \sphericalangle PAC = 40^\circ \Rightarrow \Delta APC$  isoscel  $\Rightarrow AP=PC$ , deci  $AP=AB=PC$  .....1p  
 În  $\Delta ABE$ ,  $\sphericalangle ABC = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle BAE = 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle BEA = 50^\circ \Rightarrow \Delta ABE$  isoscel  $\Rightarrow AB=BE$ , deci  $AP=AB=PC=BE$  .....1p  
 În  $\Delta ACE$ , MN linie mijlocie  $\Rightarrow MN \parallel CE \Rightarrow MN \parallel BD$  și  $CE=2MN$ ,  
 cum  $PC=BE \Rightarrow PB=CE \Rightarrow 2DB=2MN \Rightarrow DB=MN$  deci BDMN paralelogram .....1p  
**b)** în  $\Delta ADC$ ,  $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ , MD –mediană  $\Rightarrow DM=MC$  .....1p  
 dar  $DM=BN \Rightarrow BN=MC$ , cum  $MN \parallel BD \Rightarrow BCMN$  trapez isoscel  $\Rightarrow BM=NC$  . .....2p