Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie $A=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{10}{\sqrt{6}}+\frac{21}{\sqrt{12}}+\frac{36}{\sqrt{20}}+\cdots+\frac{2024\cdot 4049}{\sqrt{2024\cdot 2025}}$. Arătați că $A>2024^2$.

Problema 2.

Se consideră numerele reale

$a=\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots+\sqrt{42}}}$, unde semnul radical apare de 2025 ori,

și $b=2\sqrt{19+8\sqrt{3}}-\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}-\left(\left|2^{123}-3^{82}\right|+2^{123}\right):3^{80}$.

a) Demonstrați că $[a]$=6, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Determinați $x\in\mathbb{Z}$, pentru care $\sqrt{\frac{x\cdot[a]-3}{x\cdot b+5}}\in\mathbb{N}$.

Problema 3.

Fie un triunghi ABC cu AB≠AC și punctul D pe latura BC astfel încât AD este bisectoarea $\sphericalangle BAC$. Notăm cu O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD. Dreptele BO_1 și CO_2 se intersectează în punctul M.

Demonstrați că triunghiul MBC este isoscel, iar punctele A, B, C și M sunt conciclice.

(G.M. nr.6-7-8 /2024)

Problema 4.

Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC=60^\circ$ și $\sphericalangle ACB=40^\circ$. Pe latura BC se iau punctele D, P și E astfel încât $\sphericalangle BAD=\sphericalangle EAC=10^\circ$ și BD=DP, iar punctele M și N sunt mijloacele laturilor AC și AE.

a) Demonstrați că BDMN paralelogram.

b) Arătați că BM=NC.

Notă: *Timp de lucru: 3 ore*
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte