Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a V-a

Barem de notare și evaluare

● Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

● Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Erată Problema 1: Stabiliți dacă există cel puțin 15 pătrate perfecte între numerele 2^{2n+3} și $5 \cdot 4^{n+3}$, oricare ar fi numărul natural n.

$2^{2n+3} = 2^{2n} \cdot 2^3 = (2^n)^2 \cdot 8$..**1p**

$5 \cdot 4^{n+3} = 5 \cdot (2^2)^{n+3} = 5 \cdot 2^{2(n+3)} = 5 \cdot 2^{2n+6} = 5 \cdot 2^{2n} \cdot 2^6 = 320 \cdot (2^n)^2$....................................**1p**

Cum $8 < 9 < 16 < 25 < 36 < 49 < 64 < 81 < 100 < 121 < 144 < 169 < 196 < 225 < 256 <$

$289 < 320$ / $\cdot (2^n)^2$...**2p**

Obținem că:

$8\cdot (2^n)^2 < 9\cdot (2^n)^2 < 16\cdot (2^n)^2 < 25\cdot (2^n)^2 < 36\cdot (2^n)^2 < 49\cdot (2^n)^2 < 64\cdot (2^n)^2 < 81\cdot (2^n)^2 < 100\cdot (2^n)^2 < 121\cdot (2^n)^2 < 144\cdot (2^n)^2 < 169\cdot (2^n)^2 < 196\cdot (2^n)^2 < 225\cdot (2^n)^2 < 256\cdot (2^n)^2 < 289\cdot (2^n)^2 < 320\cdot (2^n)^2$...**1p**

De unde:

$8\cdot (2^n)^2 < (3\cdot 2^n)^2 < (4\cdot 2^n)^2 < (5\cdot 2^n)^2 < (6\cdot 2^n)^2 < (7\cdot 2^n)^2 < (8\cdot 2^n)^2 < (9\cdot 2^n)^2 < (10\cdot 2^n)^2 < (11\cdot 2^n)^2 < (12\cdot 2^n)^2 < (13\cdot 2^n)^2 < (14\cdot 2^n)^2 < (15\cdot 2^n)^2 < (16\cdot 2^n)^2 < (17\cdot 2^n)^2 < 320\cdot (2^n)^2$...............................**1p**

Deci există cel puțin 15 pătrate perfecte cuprinse între numerele 2^{2n+3} și $5\cdot 4^{n+3}$.....................**1p**

Problema 2

$45^2 = 2025$ și cum a și b nu pot fi simultan pare, a > b obținem că $\overline{ab}_{\max} = 43$...................**1p**

Celelalte soluții $\overline{ab}$ pot fi: 41, 32, 31, 30, 21, 10...**1p**

Verificăm, pe rând, soluțiile.

Caz I: $\overline{ab}$ = 43: 43^2 + $\overline{(4-3)(4+3)3}$ +4 –3 = 2023, de unde: 1849 + 173 + 1 = 2023, adevărat......**2p**

Caz II: $\overline{ab}$ = 41: 41^2 + $\overline{(4-1)(4+1)1}$ +4 –1 = 2023, de unde: 1681 + 351 + 3 = 2023, fals

Caz III: $\overline{ab}$ = 32: 32^2 + $\overline{(3-2)(3+2)2}$ + 3 – 2 = 2023, de unde: 1024 + 152 + 1 = 2023, fals

Caz IV: $\overline{ab}$ = 31: 31^2 + $\overline{(3-1)(3+1)1}$ + 3 – 1 = 2023, de unde: 961 + 241 + 2 = 2023, fals

Caz V: $\overline{ab}$ = 30: 30^2 + $\overline{(3-0)(3+0)0}$ + 3 – 0 = 2023, de unde: 900 + 330 + 3 = 2023, fals

Caz VI: $\overline{ab}$ = 21: 21^2 + $\overline{(2-1)(2+1)1}$ + 2 – 1 = 2023, de unde: 441 + 131 + 1 = 2023, fals

Caz VII: $\overline{ab}$ = 10: 10^2 + $\overline{(1-0)(1+0)0}$ + 1 – 0 = 2023, de unde: 100 + 110 + 1= 2023, fals.........**2p**

Deci, $\overline{ab}$ = 43 este soluție unică...**1p**

Problema 3

a) Grupăm convenabil termenii

A = $(1 + 9^1) + (9^2 + 9^3) + (9^4 + 9^5) \ldots + (9^{2024} + 9^{2025}) =$

$= (1+9) + 9^2(1+9) + 9^4(1+9) + \cdots + 9^{2024}(1+9) =$

$10 + 10 \cdot 9^2 + 10 \cdot 9^4 \ldots + 10 \cdot 9^{2024} = = 10(1 + 9^2 + 9^4 + \cdots + 9^{2024})$ **1p**

U(A) = 0 ⇒ cifra unităților este 0...**1p**

b) Notăm cu $U_{uz}(A)$ ultimele două cifre ale numărului A

Observăm că: $U_{uz}(9^1) = 09$, $U_{uz}(9^2) = 81$, $U_{uz}(9^3) = 29$, $U_{uz}(9^4) = 61$, $U_{uz}(9^5) = 49$, $U_{uz}(9^6) = 41$, $U_{uz}(9^7) = 69$, $U_{uz}(9^8) = 21$, $U_{uz}(9^9) = 89$, $U_{uz}(9^{10}) = 01$, $U_{uz}(9^{11}) = 09$, ultimele două cifre a lui 9^n se repetă din 10 în 10 ....**1p**

Notăm cu S = $U_{uz}(9^1) + U_{uz}(9^2) + U_{uz}(9^3) + U_{uz}(9^4) + U_{uz}(9^5) + U_{uz}(9^6) + U_{uz}(9^7) + U_{uz}(9^8) + U_{uz}(9^9) + U_{uz}(9^{10})$ = 450 ⇒ U_{uz}(S) =50 ....**1p**

Dar 2025 = 202 ·10 +5

A = $1 + (9^1 + 9^2 + \cdots + 9^{10}) + (9^{11} + 9^{12} + \cdots + 9^{20}) + \cdots + (9^{2011} + 9^{2012} + \cdots + 9^{2020}) + 9^{2021} + 9^{2022} + 9^{2023} + 9^{2024} + 9^{2025}$ **1p**

$U_{uz}(A) = U_{uz}[\ U_{uz}(1) + \ U_{uz}(9^1 + 9^2 + \cdots + 9^{10}) + U_{uz}(9^{11} + 9^{12} + \cdots + 9^{20}) +$

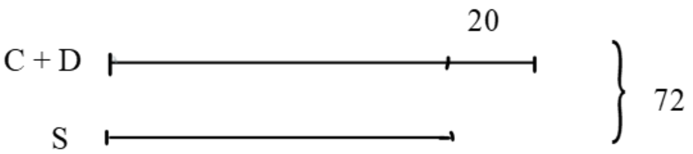
$U_{uz}\ (9^{2011} \ + 9^{2012} + \cdots + 9^{2020}) + U_{uz}(9^{2021}) + U_{uz}(9^{2022}) + U_{uz}(9^{2023}) +$

$U_{uz}(9^{2024}) + U_{uz}(9^{2025}\ )] =$ **1p**

$U_{uz}(\ 1 + 202\ \cdot 50 + 9 + 81 + 29 + 61 + 49) = \ U_{uz}(10330) = 30$..**1p**

Problema 4

Peste 5 ani suma vârstelor celor trei frați va fi egală cu $51 + 3 \cdot (2 + 5) = 72$ ani............**1p**



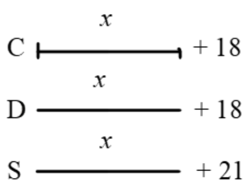
S = (72 - 20) : 2 = 26 ....**1p**

D + C = 26 + 20 = 46 ; D = C = 46 : 2 = 23 ....**1p**

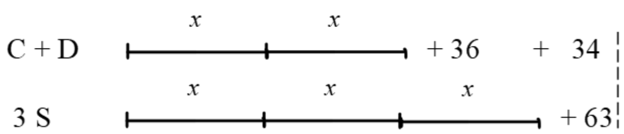
în prezent : 26 – 5 = 21 → Sorina are 21 ani

23 – 5 = 18 → Codrin și Darius au fiecare 18 ani **1p**

b) Peste x ani :



.... **1p**



.... **1p**

$x + 63 = 36 + 34$ deci $x = 7$ ani **1p**