Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a X-a

Barem de notare şi evaluare

● **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

● **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	a) $S_2=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}=\frac{1-\sqrt[3]{2}}{1-2}+\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{2-3}=\frac{1-\sqrt[3]{3}}{-1}=$ $=-1+\sqrt[3]{3}$	**2p**
	b) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k+1}}{k-(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k+1}\right)=$ $=\left(-1+\sqrt[3]{2}\right)+\left(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)+\cdots+\left(-\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)$ $=-1+\sqrt[3]{n+1}$	**2p**
	$\left[\frac{7S_n}{2n}\right]=\left[\frac{7\left(\sqrt[3]{n+1}-1\right)}{2n}\right]=\left[\frac{7(n+1-1)}{2n\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1\right)}\right]$ $=\left[\frac{7}{2\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1\right)}\right]$	**1p**
	$2\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1\right)\geq 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{(n+1)^3}}=6\sqrt[3]{n+1}\geq 6\sqrt[3]{2}>7$	**1p**
	pentru orice $n\geq 1\Longrightarrow\ 0<\frac{7}{2\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1\right)}<1\Longrightarrow\left[\frac{7S_n}{2n}\right]=0$	**1p**
2.	Notăm $P=\log_a\sqrt{\frac{b+c}{2}}\cdot\log_b\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot\log_c\sqrt{\frac{a+b}{2}}=$ $=\frac{1}{8}\log_a\frac{b+c}{2}\cdot\log_b\frac{a+c}{2}\cdot\log_c\frac{a+b}{2}$	**1p**

	Știind că $m_a \ge m_g \Longrightarrow \frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc},\ \frac{a+c}{2} \ge \sqrt{ac},\ \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ și $a, b, c > 1$ $\Longrightarrow P \ge \frac{1}{8} \log_a \sqrt{bc} \cdot \log_b \sqrt{ac} \cdot \log_c \sqrt{ab} =$ $= \frac{1}{8} \cdot \frac{\log_a b + \log_a c}{2} \cdot \frac{\log_b a + \log_b c}{2} \cdot \frac{\log_c a + \log_c b}{2}$ Se aplică din nou inegalitatea mediilor, $m_a \ge m_g$: $P \ge \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\log_a b \cdot \log_a c} \cdot \sqrt{\log_b a \cdot \log_b c} \cdot \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b} =$ $= \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$ $\Longrightarrow \log_a \sqrt{\frac{b+c}{2}} \cdot \log_b \sqrt{\frac{a+c}{2}} \cdot \log_c \sqrt{\frac{a+b}{2}} \ge \frac{1}{8}$	**1p** **2p** **2p** **1p**

3.	$a = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} = 1 + \sqrt{2},\ a \in R\ ,\ b = \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} = 1 - \sqrt{2},\ b \in R$ $M = \{-a-b;\ -a+b;\ a-b;\ a+b;\ -a;\ -b;\ 0;\ a;\ b\}$ $M = \{-2;\ -2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ 2; -1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2};\ 0;\ 1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2}\}$ $M \cap Q = \{-2; 0; 2\} \Rightarrow card(M) = 3$ $card(M \cap (R \backslash Q)) = 6$	**2p** **2p** **1p** **1p** **1p**

4.	În prima relație substituim $x \to g^{-1}(x)$ și se obține $f(g^{-1}(x)) + f(x) - 2x = 3 \quad (1)$ Folosind a doua egalitate va rezulta $f(g(x)) = 1 + f(x) \quad (2)$ Din a) înlocuind $f(g(x))$ se va obține $f(x) = 1 + g(x) \quad (3)$ În (3) înlocuim $x \to g^{-1}(x)$ și se va rezulta $f(g^{-1}(x)) = 1 + x \overset{(1)}{\Rightarrow}$ $f(x) = x + 2$ și $g(x) = x + 1$	**2p** **2p** **2p** **1p**