Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2025
Clasa a X-a

Problema 1.

Se consideră suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{(k+1)^2}}$, unde $n \in N^*$.

a) Să se calculeze S_2.

b) Să se determine $\left[\frac{7S_n}{2n}\right]$, $n \in N^*$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Problema 2.

Să se demonstreze că $\log_a \sqrt{\frac{b+c}{2}} \cdot \log_b \sqrt{\frac{a+c}{2}} \cdot \log_c \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{1}{8}$, $\forall\, a, b, c > 1$.

Problema 3.

Fie numerele reale $a = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ și mulțimile $A = \{-1; 0; 1\}$,
$M = \{ax + by \,/\, x, y \in A\}$.

Determinați numărul elementelor mulțimilor $M \cap Q$ și $M \cap (R \backslash Q)$.

(Supliment GM-septembrie 2024)

Problema 4.

Să se determine $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g bijectivă, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $f(x) + f\big(g(x)\big) - 2g(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f\big(g(x)\big) + f\big(g^{-1}(x)\big) - 2x = 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: *Timp de lucru: 3 ore*
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte