Testul nr. 20

Erată. Dintr-o eroare acest test are două probleme 3, iar la prima problemă 3, subpunctul b) este o greşeală în enunţ: expresia "numărul merelor să fie egal un sfert din numărul portocalelor" trebuie înlocuită cu "numărul merelor să fie egal cu o treime din numărul portocalelor".
La problema 4 expresia "Se consideră şirul: 61, 64, 67, 71,...,1402, 1405" trebuie înlocuită cu "Se consideră şirul: 61, 64, 67, 70,...,1402, 1405".

Problema 1 (30 puncte = 3×10 puncte)

a) Să se calculeze $\left[(73-38):5+2\right]\times 3$.

b) Să se determine numărul natural a din egalitatea:
$\left\{\left[(73-38):5+2\right]\times 3+26:a\right\}\times 5+23=168$.

c) Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{a53}+\overline{4b9}=\overline{c342}$.

Problema 2 (20 puncte = 2 ×10 puncte)

Un aprozar are la vânzare o cantitate totală de 330 de kg fructe formată din mere şi pere. Dacă a fost vândută $\frac{3}{5}$ din cantitatea de mere şi $\frac{2}{3}$ din cantitatea de pere, atunci în aprozar a rămas o cantitate totală de 120 de kg de fructe.

a) Determinaţi câte kg de mere a avut iniţial aprozarul la vânzare.

b) Dacă 1 kg de mere costă 3 lei şi 1 kg de pere costă 5 lei, atunci să se determine ce sumă a încasat aprozarul din vânzarea fructelor.

Problema 3 (20 puncte = 2 ×10 puncte)

Un învăţător împarte elevilor din clasa sa mere şi portocale. Învăţătorul are de trei ori mai multe mere decât portocale. Învăţătorul dă fiecărui elev câte 7 mere şi 6 portocale şi îi rămân 100 de mere, dar portocalele au fost insuficiente, deoarece unul dintre elevi primeşte doar 2 portocale şi 6 elevi nu au primit nicio portocală.

a) Determinaţi numărul de portocale.

b) Dacă învăţătorul schimbă cu un comerciant o parte din mere astfel încât pentru fiecare măr dat comerciantului, învăţătorul primeşte 2 portocale, atunci să se determine câte mere trebuie să schimbe învăţătorul pentru ca numărul merelor să fie egal cu o treime din numărul portocalelor.

Problema 3 (20 puncte = 2 ×10 puncte)

Doi copii, Andrei şi Cosmin, s-au întrecut la fugă. Lungimea unui pas a lui Cosmin este cât jumătate din lungimea a trei paşi făcuţi de Andrei şi, în timp ce Andrei face 7 paşi, Cosmin face 5 paşi. Dacă Andrei a făcut 84 de paşi şi distanţa dintre copii este de 3 m, atunci să se determine:

a) care copil dintre cei doi este primul.

b) lungimea pasului lui Andrei exprimată în centimetri.

c) lungimea pasului lui Cosmin exprimată în centimetri.

Problema 4 (20 puncte = 10 puncte pentru a) + 5 puncte pentru b) + 5 puncte pentru c))

Se consideră şirul: 61, 64, 67, 70,...,1402, 1405

a) Care este al 57-lea termen al şirului?

b) Câţi termeni are şirul?

c) Calculaţi suma ultimilor 57 de termeni ai şirului.

Justificaţi răspunsurile!

test elaborat de prof. ROMEO ZAMFIR

Rezolvarea testului 20
Soluţii prezentate de prof. **Romeo Zamfir**

Problema 1.

a) $\left[(73-38):5+2\right]\times 3=$

$=(35:5+2)\times 3=$

$=(7+2)\times 3=$

$=9\times 3=27$

Răspuns: rezultatul calculului este 27.

b) $\left\{\left[(73-38):5+2\right]\times 3+26:a\right\}\times 5+23=168$

$(27+26:a)\times 5+23=168$

$(27+26:a)\times 5=168-23$

$(27+26:a)\times 5=145$

$27+26:a=145:5$

$27+26:a=29$

$26:a=29-27$

$26:a=2$

$a=26:2$

$a=13$

Răspuns: $a=13$

c) Relaţia dată în ipoteză poate fi scrisă sub forma:

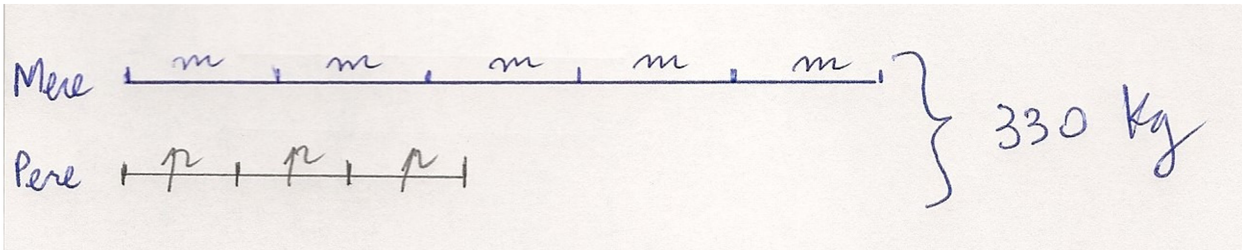
$$\begin{array}{r} \overline{a53}\,+ \\ \overline{4b9} \\ \hline \overline{c342} \end{array}$$

Analizând coloana cu cifrele zecilor observăm că $1+5+b$ trebuie să aibă ultima cifră 4, de unde deducem că singura variantă posibilă este $b=8$, apoi analizând coloana cu cifrele sutelor deducem că $1+a+4$ trebuie să aibă ultima cifră 3, de unde deducem că singura variantă posibilă este $a=8$ şi $c=1$. Răspuns: $a=8$, $b=8$ şi $c=1$, adică $\overline{abc}=881$. Răspuns: $\overline{abc}=881$.

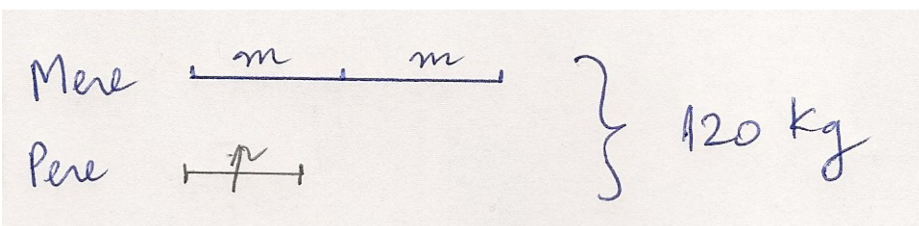
Problema 2.

Avem două tipuri de segmente, un tip pentru mere şi alt tip pentru pere. Cantitatea corespunzătoare unui segment pentru mere o notăm cu *m* (parte de mere) şi cantitatea corespunzătoare unui segment de pere o notăm cu *p* (parte de pere).

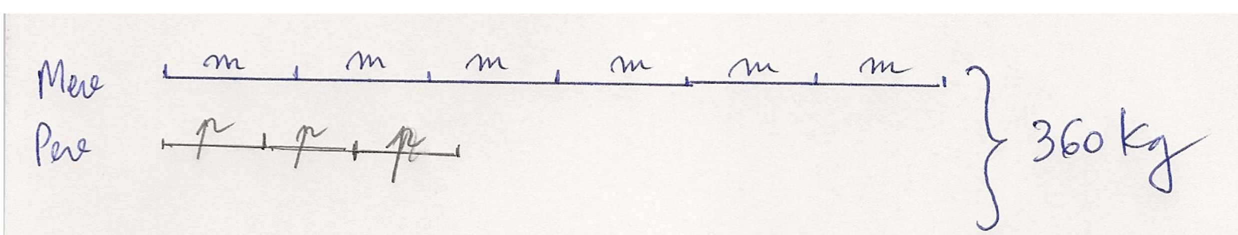
Pentru situaţia iniţială avem desenul de mai jos:



Dacă a fost vândută $\frac{3}{5}$ din cantitatea de mere şi $\frac{2}{3}$ din cantitatea de pere, atunci în magazin a rămas $\frac{2}{5}$ din cantitatea de mere şi $\frac{1}{3}$ din cantitatea de pere, ceea ce reprezintă, conform enunţului problemei, 120 kg de fructe.
Desenul corespunzător situaţiei de mai sus este următorul:



Pentru a putea compara cantităţile trebuie să avem fie aceeaşi cantitate de mere ca cea iniţială, fie aceeaşi cantitate de pere ca cea iniţială. Pentru aceasta triplăm cantităţile de fructe corespunzătoare ultimului desen şi se obţine desenul de mai jos:

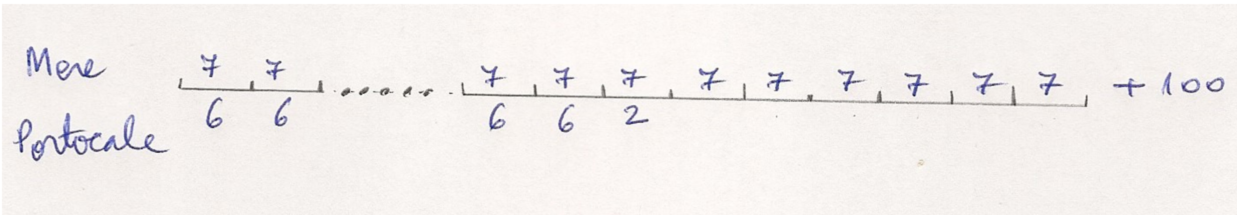


Comparând situaţia iniţială (primul desen) şi situaţia de mai sus (al treilea desen), prin diferenţă, obţinem că o parte de mere m este egală cu $360-330=30$ kg, apoi din al doilea desen obţinem că o parte de pere p este egală cu $120-2\times m=120-2\times 30=120-60=60$ kg. Prin urmare, iniţial în aprozar au fost $5\times m=5\times 30=150$ kg mere şi $3\times p=3\times 60=180$ kg pere.
Răspuns: aprozarul a avut iniţial la vânzare 150 kg de mere.

b) Aprozarul a vândut $150:5\times3=90$ kg de mere şi $180:3\times2=120$ kg de pere, deci aprozarul a încasat $90\times3+120\times5=270+670=870$ lei.
Răspuns: aprozarul a încasat 870 lei.

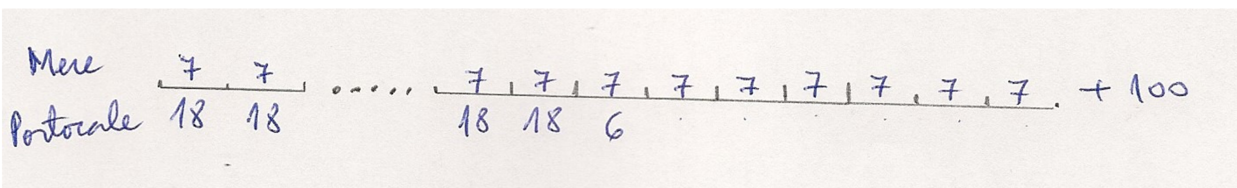
Problema 3.

a) Desenul corespunzător problemei este următorul (un segment reprezintă un elev):

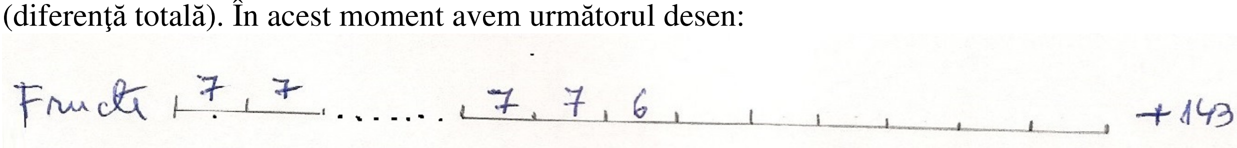


Pentru rezolvarea problemei este necesar ca numărul merelor să fie egal cu numărul portocalelor. Pentru aceasta triplăm numărul portocalelor şi astfel învăţătorul dă fiecărui elev câte $6\times3=18$ portocale, iar cum portocalele au fost insuficiente, unul dintre elevi primeşte doar $2\times3=6$ portocale şi 6 elevi nu au primit nicio portocală.

Desenul corespunzător acestei situaţii este următorul:



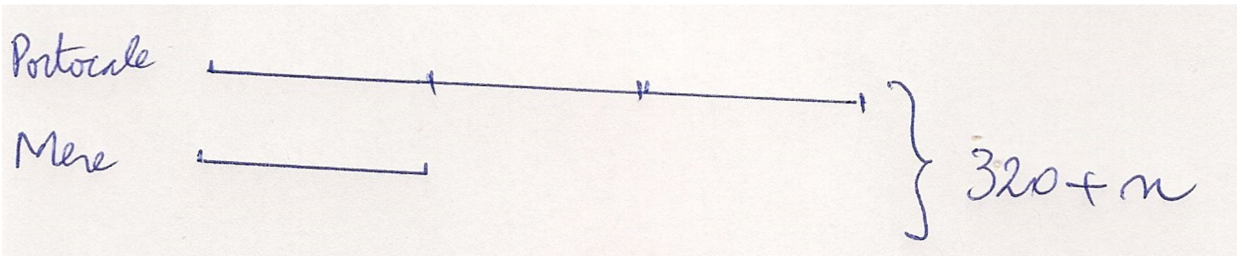
Deoarece acum numărul merelor este egal cu numărul portocalelor putem considera că avem un singur tip de fructe pe care o dată învăţătorul le împarte câte 7 la fiecare elev, iar după aceea le ia înapoi şi apoi le împarte câte 18 la fiecare elev.
Acum considerăm că fructele sunt împărţite câte 7 la fiecare elev şi încercăm să trecem din această situaţie în situaţia cu 18 fructe la fiecare elev. În acest scop luăm cele 7 fructe de la ultimii şase elevi, deoarece aceştia trebuie să rămână fără fructe, de la următorul luăm $7-6=1$ fructe şi astfel vom avea de redistribuit $(7-6)+6\times7+100=1+42+100=143$ de fructe (diferenţă totală). În acest moment avem următorul desen:



Cele 143 de fructe trebuie să le împărţim elevilor care acum au 7 fructe, astfel încât fiecare elev să aibă 18 fructe, deci fiecare elev cu 7 fructe trebuie să primească: $18-7=11$ fructe (diferenţă pe unitate).

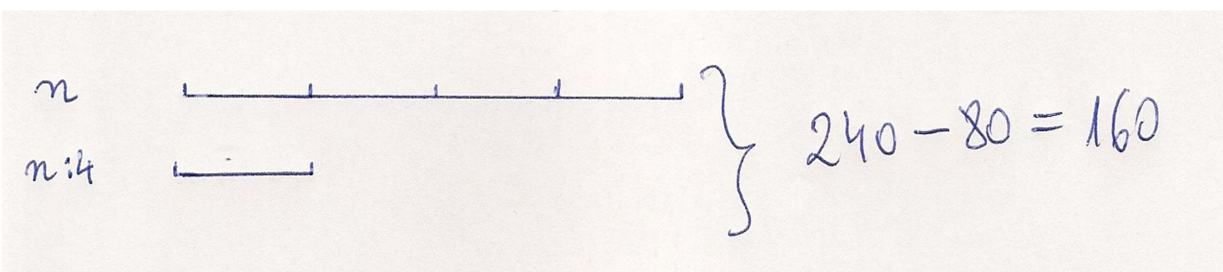
Prin urmare, numărul elevilor cu 7 fructe din desenul de mai sus (ultimul desen) este egal cu $143:11=13$ elevi. Numărul total al elevilor este $13+1+6=20$ elevi, numărul merelor este egal cu $20\times7+100=140+100=240$ şi numărul portocalelor este egal cu $240:3=80$ portocale.
Răspuns: 80 de portocale.

b) Iniţial, numărul total de fructe este egal cu $240+80=320$ fructe.
La fiecare schimb numărul total al fructelor pe care le are învăţătorul creşte cu un fruct. Notăm cu n numărul schimburilor efectuate de învăţător şi la final vom avea următoarea situaţie:



După efectuarea schimburilor numărul merelor este egal cu $80+n:4$, iar iniţial învăţătorul avea cu n mere mai mult.

La rezolvarea subpunctului a) am obţinut că iniţial învăţătorul avea 240 mere. Prin urmare, obţinem următorul desen:

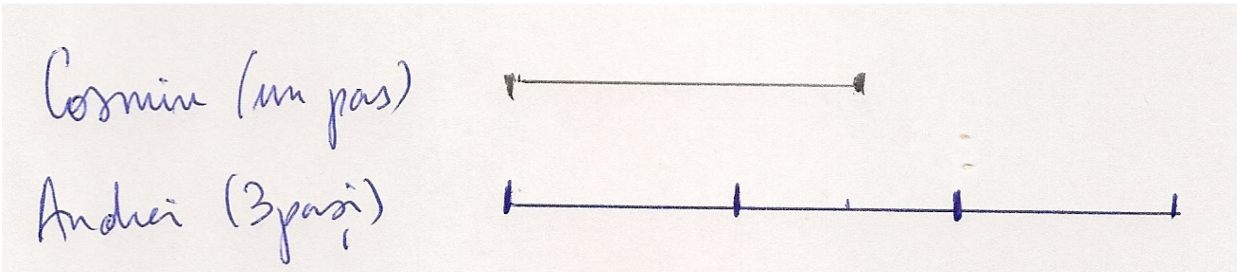


Deci, $n=160:5\times 4=32\times 4=128$ de mere a schimbat învăţătorul cu comerciantul.
Răspuns: 128 de mere.

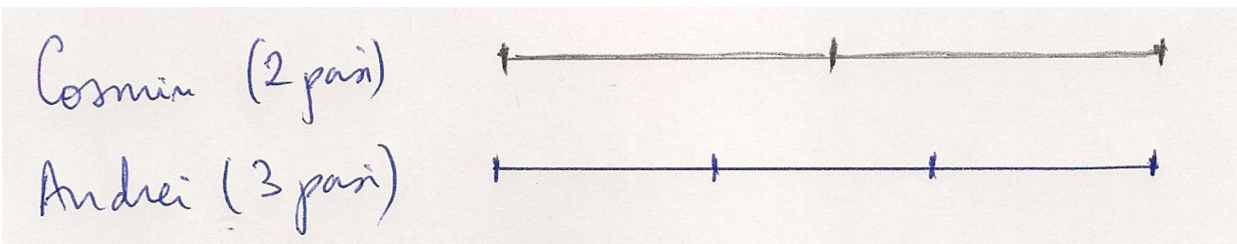
Problema 3.

a) Din ipoteză avem că în timp ce Andrei face 7 paşi, Cosmin face 5 paşi şi că Andrei a făcut 84 de paşi, deci numărul paşilor făcut de Cosmin este egal cu: $84:7\times5=12\times5=60$ de paşi.

Observăm că avem două tipuri de paşi, pasul lui Andrei şi pasul lui Cosmin, şi legătura dintre lungimile acestor paşi este reprezentată în desenul de mai jos:



Din ipoteză avem că lungimea unui pas a lui Cosmin este cât jumătate din lungimea a trei paşi făcuţi de Andrei, deci lungimea a doi paşi ai lui Cosmin este egală cu lungimea a trei paşi ai lui Andrei.



Prin urmare, lungimea celor 84 de paşi făcuţi de Andrei este egală cu lungimea a $84:3\times2=28\times2=56$ paşi făcuţi de Cosmin. Dar, Cosmin a făcut 60 de paşi, deci el este primul. Răspuns: Cosmin a câştigat întrecerea la fugă.

b) + **c)** Distanţa dintre copii este de 3 metri = 300 centimetri şi este echivalentă cu lungimea a $60-56=4$ paşi ai lui Cosmin. Deci, lungimea pasului lui Cosmin este egală cu $300:4=75$ centimetri, iar lungimea pasului lui Andrei este egală $2\times75:3=150:3=50$ centimetri.

Răspuns: lungimea pasului lui Andrei este de 50 cm şi lungimea pasului lui Cosmin este de 75 cm.

Problema 4.

b) Observăm că fiecare termen al şirului creşte cu 3 unităţi faţă de precedentul. Pentru a determina câţi termeni are şirul, împărţim fiecare termen la 3, iar câturile ne indică numărul de termeni ai şirului:

$$61:3=20 \text{ rest } 1$$
$$64:3=21 \text{ rest } 1$$
$$67:3=22 \text{ rest } 1$$
$$70:3=23 \text{ rest } 1$$
....
....
....
$$1402:3=467 \text{ rest } 1$$
$$1405:3=468 \text{ rest } 1$$

Urmărind şirul câturilor: 20, 21, 22, 23, ... , 467, 468 deducem că şirul are $468-19=449$ de termeni.

Răspuns: şirul are 449 de termeni.

a) Notăm cu x al 57-lea termen al şirului şi cu y câtul împărţirii lui x la 3. Avem că:

$$61:3=20 \text{ rest } 1$$
$$64:3=21 \text{ rest } 1$$
$$67:3=22 \text{ rest } 1$$
$$70:3=23 \text{ rest } 1$$
....
....
$$x:3=y \text{ rest } 1$$

Urmărind şirul câturilor: 20, 21, 22, 23, ... , y deducem că $y-19=57$, de unde obţinem $y=57+19=76$ şi $x=3\times y+1=3\times 76+1=228+1=229$.

Altfel, observăm că fiecare termen al şirului creşte cu 3 unităţi faţă de precedentul, deci al doilea termen este cu 3 mai mare decât primul, al treilea termen este cu $3+3=6$ mai mare decât primul, al patrulea termen este cu $3+3+3=9$ mai mare decât primul şi aşa mai departe. Prin urmare, al 57-lea termen este cu $\underbrace{3+3+...+3}_{\text{de 56 ori}}=56\times 3=168$ mai mare decât primul, de unde deducem că al 57-lea termen este egal cu $61+168=229$.

Răspuns: al 57-lea termen al şirului este 229.

c) Şirul are 449 de termeni, deci numărând de la ultimul termen spre primul termen, al 57-lea termen este al $449-57+1=393$-lea termen al şirului (numărând de la început)

Notăm cu a al 393-lea termen al şirului şi cu b câtul împărţirii lui a la 3. Prin urmare,

$$61:3=20 \text{ rest } 1$$
$$64:3=21 \text{ rest } 1$$
$$67:3=22 \text{ rest } 1$$
$$70:3=23 \text{ rest } 1$$
....
....
$$a:3=b \text{ rest } 1$$

Urmărind şirul câturilor: 20, 21, 22, 23, ... , b deducem că $b-19=393$, de unde obţinem $b=393+19=412$ şi $a=3\times b+1=3\times 412+1=1236+1=1237$.

Rezultă că al 57-lea termen, numărat de la sfârşit, este egal cu $1405-168=1237$.

....

Altfel, putem proceda astfel: penultimul termen este cu 3 mai mic decât ultimul, antepenultimul termen este cu $3+3=6$ mai mic decât ultimul şi aşa mai departe.

Prin urmare, numărând de la ultimul termen spre primul termen deducem că al 57-lea termen este cu $\underbrace{3+3+...+3}_{\text{de 56 ori}}=56\times 3=168$ mai mic decât ultimul, de unde deducem că al 57-lea termen (de la sfârşit) este egal cu $1405-168=1237$.

....

Deci, trebuie să calculăm suma $S=1237+1240+1243+...+1399+1402+1405$. Scriem suma de de ori ca mai jos:

$$\begin{array}{l} S \quad =1237+1240+1243+...+1399+1402+1405 \\ S \quad =1405+1402+1399+...+1243+1240+1237 \\ \hline 2\times S=2642+2642+2642+...+2642+2642+2642 \end{array}$$

Obţinem $S=2642:2\times 57=75297$.

Răspuns: suma ultimilor 57 de termeni este egală cu 75297.

Notă. Foarte des întâlnim în soluţiile date de elevii ce participă la examen soluţii în care ei folosesc formule de la capitolul progresii aritmetice ce sunt studiate de elevii de liceu din clasa a 9-a. Deşi aceste soluţii au fost punctate de fiecare dată, folosirea lor de un elev din clasa a 4-a nu este normală, deoarece sunt învăţate pe de rost, nu au logică pentru ei şi nu cunosc cum au fost deduse. Ceea ce am prezentat mai sus este în conformitate cu programa de concurs şi soluţiile au logică matematică şi pentru un elev din clasa a 4-a.

De exemplu, pentru a determina numărul de termeni în cazul şirurilor în care fiecare termen creşte cu acelaşi număr *r* faţă de precedentul (progresii aritmetice cu raţia *r*) se recomandă să se împartă termenii şirului la *r* şi numărul lor se determină urmărind şirul câturilor acestor împărţiri, care este un şir de numere consecutive. În cazul problemei de mai sus, şirul câturilor este

20, 21, 22, 23, ... , 467, 468,

iar numărul lor se deduce analizând şirul 1,2,3,..18,19, 20, 21, 22, 23, ... , 467, 468, deci şirul câturilor are 468 - 19 = 449 termeni.

În cazul sumelor cu termenii unor astfel de şiruri (sume de tip Gauss) se recomandă să se scrie suma de două ori, prima data de la primul la ultimul termen, apoi de la ultimul termen la primul termen şi apoi acestea se adună membru cu membru (vezi mai sus sau mai jos):

$$\begin{array}{l} S \quad =1237+1240+1243+...+1399+1402+1405 \\ S \quad =1405+1402+1399+...+1243+1240+1237 \\ \hline 2\times S=2642+2642+2642+...+2642+2642+2642 \end{array}$$