Testul nr. 3

Problema 1 (30 puncte = 3 x 10 puncte)

a) Să se calculeze $24+12:[16-2\times(1+4)]$.

b) Să se determine numărul natural a din egalitatea: $(a+24+12:[16-2\times(1+4)]):10=3$.

c) Să se determine numărul $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{3a8}<319<\overline{b71}<428<\overline{42c}$.

Problema 2 (20 puncte = 2 x 10 puncte)

Într-un magazin erau 100 biciclete şi păpuşi. După ce s-au vândut 10 păpuşi şi 10 biciclete, numărul bicicletelor rămase reprezintă o treime din numărul păpuşilor rămase.

a) Câte biciclete erau la început în magazin?

b) Câte păpuşi erau la început în magazin?

Problema 3 (20 puncte = 10 puncte + 5 puncte + 5 puncte)

Ionel citeşte o care cu 150 pagini ce sunt numerotate cu numere naturale de la 1 la 150.

a) De câte ori apare cifra 1 în numerotarea paginilor cărţii?

b) Câte cifre sunt folosite pentru numerotarea tuturor paginilor cărţii?

c) Demonstraţi că dacă Ionel rupe la întâmplare 5 file din carte şi adună numerele tuturor paginilor rupte, rezultatul este un număr impar.

Problema 4 (20 puncte = 10 puncte + 5 puncte + 5 puncte)

Suma a 100 numere naturale nenule este 5000.

a) Arăraţi că cel puţin două dintre acestea sunt egale.

b) Care este cel mai mare număr de numere naturale nenule egale, dintre cele 100 de numere, a căror sumă este 5000?

c) Care este cel mai mic număr de numere naturale nenule egale, dintre cele 100 de numere, a căror sumă este 5000?

test elaborat de prof. GEORGETA BALACEA

Rezolvarea testului 3
Soluţii prezentate de prof. Georgeta Balacea

Problema 1. a)

$$24+12:[16-2\times(1+4)]=$$
$$=24+12:(16-2\times5)=$$
$$=24+12:(16-10)=$$
$$=24+12:6=$$
$$=24+2=$$
$$=26$$

Răspuns: rezultatul calculului este 26.

b)

$$\{a+24+12:[16-2\times(1+4)]\}:10=3$$
$$(a+26):10=3$$
$$a+26=30$$
$$a=30-26$$
$$a=4$$

Răspuns: $a = 4$

c) Analizând relaţiile din ipoteză observăm că cifra a poate lua valorile 0 sau 1. Cum cifra a este cifra sutelor pentru numărul natural $\overline{abc}$, deducem că a nu poate lua valoarea 0.

$\overline{3a8}<319,\ a\neq 0,$ prin urmare $a=1$.

Analizând relaţia $319<\overline{b71}<428,$ deducem că cifra b este mai mare sau egală cu 3. Dar $\overline{b71}<428$. Dacă cifra b ar fi mai mare sau egală cu 4 numărul $\overline{b71}$ ar fi mai mare decât 428. Prin urmare $b = 3$.

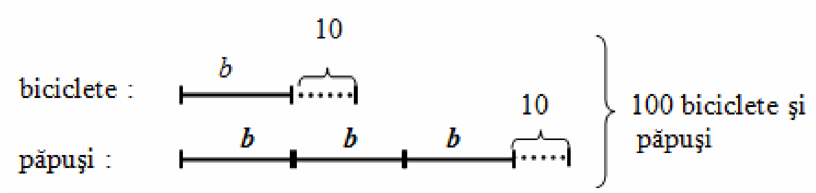
Din relaţia $428 < \overline{42c}$ deducem că c este mai mare sau egal cu 9 . Cum este cifră rezultă că $c \leq 9$. Prin urmare $c = 9$.

Obţinem $\overline{abc} = 139$

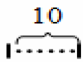
Răspuns: $\overline{abc} = 139$

Problema 2.

Rezolvarea problemei presupune folosirea metodei grafice.



a) Avem două tipuri de segmente :
un tip pentru numărul de biciclete rămase după vânzarea celor 10 biciclete 

şi un tip care reprezintă 10 bucăţi de jucării vândute (10 biciclete , respectiv 10 păpuşi) 

.
Am notat cu ***b*** numărul de biciclete rămase după vânzarea celor 10 biciclete. Prin urmare ***b*** = numărul bicicletelor – 10.
După ce s-au vândut 10 păpuşi şi 10 biciclete, numărul păpuşilor rămase este de trei ori mai mare decât numărul bicicletelor rămase.

S-au vândut 10 biciclete şi 10 păpuşi, adică 20 biciclete şi păpuşi.
Au rămas $100 - 20 = 80$ (biciclete şi păpuşi rămase)

$4 \times b = 80$

$b = 80 : 4$

$b = 20$
b= numărul bicicletelor – 10 , prin urmare numărul de biciclete care au fost la început în magazin este b+10=20+10.
În magazin au fost la început 30 biciclete.

Răspuns: La început au fost 30 biciclete în magazin.

b) Numărul de păpuşi care au fost la început în magazin este egal cu $3\times b+10$.
$b=20$, prin urmare numărul iniţial de păpuşi este egal cu $3\times 20+10=70$.

Răspuns: În magazin au fost la început 70 păpuşi.

Problema 3.

Cartea are paginile numerotate de la 1 la 150 şi o filă are două pagini numerotate cu numere naturale consecutive.
a) Cifra 1 poate să apară la cifra unităţilor, cifra zecilor şi la cifra sutelor.

La cifra unităţilor, cifra 1 apare din 10 în 10, la numerele: 1, 11, 21, 31, ..., 141, deci 15 apariţii are cifra 1 la cifra unităţilor.

La cifra zecilor, cifra 1 apare la numerele: 10,11,12, ... ,19 şi 110, 111, 112, ..., 119, deci 20 de apariţii are cifra 1 la cifra zecilor.

La cifra sutelor, cifra 1 apare la numerele: 100, 101, 102, ..., 150, deci cifra 1 are 51 de apariţii la cifra sutelor.

Răspuns: $15+20+51=86$ de apariţii.

b) Între 1 şi 9 sunt 9 numere de câte o cifră, prin urmare se folosesc $9\times 1=9$ cifre.
Între 10 şi 99 sunt 90 numere de câte două cifre, prin urmare se folosesc $90\times 2=180$ cifre.
Între 100 şi 150 sunt 51 numere de câte trei cifre, prin urmare se folosesc $51\times 3=153$ cifre.

Pentru scrierea numerelor naturale mai mari sau egale cu 1 şi mai mici sau egale cu 150 se folosesc în total $9+180+153=342$ cifre.

Răspuns: 342 cifre.

c) Ionel rupe la întâmplare 5 file. Cinci este număr impar.
Suma numerelor cu care sunt numerotate cele două pagini ale unei file este număr impar.
Suma unui număr impar de numere impare este număr impar.
Prin urmare, suma numerelor tuturor paginilor rupte de Ionel este număr impar.

Problema 4

a) Dacă presupunem că cele 100 numere naturale nenule sunt distincte două câte două atunci cea mai mică sumă a acelor 100 numere este suma numerelor naturale consecutive de la 1 la 100.

$S=1\quad+2\quad+3+...\ +100$

$S=100+99+98+...+1$

Dacă adunăm membru cu membru cele două egalităţi obţinem :

$2\times S=\underbrace{101+101+...101}_{\text{100 termeni}}$

$2\times S=101\times100$

$2\times S=10100$

$S=10100:2$

$S=5050.$

$S>5000,$ prin urmare cel putin două numere sunt egale.

b) $\underbrace{a+a+...+a}_{\text{100 numere}}=5000$

$100\times a=5000$

$a=5000:100$

$a=50$

Prin urmare, suma are 100 termeni egali cu 50.
Răspuns: numărul maxim de termeni egali este 100.

c) Am demonstrat la subpunctul a) că printre cele 100 de numere sunt cel puţin două numere egale. Prin urmare, numărul maxim de numere distincte două câte două nu poate depăşi 99. Dacă putem construi un exemplu cu 100 de numere naturale nenule, din care 99 de numere naturale sunt distincte două câte două şi cu suma lor 5000, atunci *cel mai mic număr de numere naturale nenule egale, dintre cele 100 de numere care respectă toate condiţiile problemei este egal cu 2*.

răspunsul la problemă este 2 numere egale.

Am calculat mai sus că $S = 1+2+3+ \ldots +100 = 5050$, de unde deducem că $1+2+3+\ldots +99 = 5050-100 = 4950$

Prin urmare,

$$1+2+3+\ldots+49+50+51+\ldots+99+50 = 5000$$

sau

$$1+2+3+\ldots+48+49+50+\ldots+98+100+49 = 5000$$

sau

$$1+2+3+\ldots+47+48+49+\ldots+98+101+48 = 5000$$

Mai pot fi construite şi alte exemple, deşi doar un singur exemplu este suficient.

Deci, cel mai mic număr de numere naturale egale dintre cele 100 de numere, a căror sumă este 5000 este 2.

Răspuns: 2