INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$. Să se calculeze suma de matrice:

$$S=\sum_{k=1}^{3\cdot n+1}\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2\cdot k} \\ k & k\cdot(k+1) & k!\cdot k \end{pmatrix}.$$

Problema 2.

a) Fie matricea $X \in M_2(\mathbb{Z})$, $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze X^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se demonstreze că există o matrice $D \in M_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $D^{2016}=B\cdot A$.

Problema 3.

Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x-1)=-4\cdot x^3+12\cdot x^2-9\cdot x+1$ şi $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori}(\sin x)$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

a) $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_n(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\sin\dfrac{\pi}{a_n}$

Problema 4.

a) Fie a>0, $b\neq 0$, numere date, iar $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir neconstant, definit prin $x_1=b$, $x_{n+1}\cdot x_n=x_n^2-a\cdot x_n+a^2, (\forall)n\geq 1$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir monoton, x_1>0, astfel încât

$$x_1-x_2+x_3-x_4+\ldots+x_{2\cdot n-1}-x_{2\cdot n}=x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+\ldots+x_{2\cdot n},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7