INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a XII-a

Problema 1.

a). Fie a>0 şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^6+4\cdot x^3+a\cdot x^2+4}$. Să se determine o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, cu $F(0)=0$.

b). Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{, dacă } x=0\end{cases}$.

Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$, este mărginită dar nu îşi atinge marginile.

Problema 2.

Fie $\varepsilon=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathbb{Z}[\varepsilon]=\{a+b\cdot\varepsilon\ /\ a,b\in\mathbb{Z}\}$.

a) Să se demonstreze că $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ este monoid în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

b) Să se determine elementele inversabile ale monoidului.

c) Dacă notăm cu $U(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ grupul elementelor inversabile, să se demonstreze că $(U(\mathbb{Z}[\varepsilon]),\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6,+)$.

Problema 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $e^{f(x)}+f(x)\le x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.

Să se demonstreze că $\displaystyle\int_1^{e+1} f(x)dx\le\frac{3}{2}$.

Problema 4.

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă funcţiile $f,\ g: G\to G,\ f(x)=x^{2\cdot n}$ şi $g(x)=x^{3\cdot n}$ sunt morfisme surjective, atunci grupul $(G,\cdot)$ este comutativ.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7