Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	Soluţie, rezolvare	Punctaj
	Pentru n=0, obţinem $z=\bar{z} \Rightarrow$ soluţiile ecuaţiei sunt: $z \in \mathbb{R}$	**1p**
	Fie $n \geq 1$, observăm că z=0 este soluţie.	**1p**
	Fie $z \neq 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$;	
	Aplicând modulul ecuaţiei $\Rightarrow \lvert z\rvert^{n+1} = \lvert\bar{z}\rvert \Rightarrow \lvert z\rvert^{n} = 1 \Rightarrow \lvert z\rvert = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$	
	Atunci ecuaţia devine: $z^{n+1} = \frac{1}{z} \Rightarrow z^{n+2} = 1 \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n+2} + i\sin\frac{2k\pi}{n+2},\ k \in \overline{0, n+1}$;	**1p**
	Pentru $n \geq 1$, soluţiile ecuaţiei sunt: $z \in \{0\} \cup \left\{\cos\frac{2k\pi}{n+2} + i\sin\frac{2k\pi}{n+2},\ k \in \overline{0, n+1}\right\}$	**1p**
	b) Din condiţia $\frac{y}{x} > 0 \Rightarrow x > 0, y > 0$ sau $x<0$, $y<0$;	
	Se observă că dacă perechea (x, y) este soluţie, atunci şi perechea $(-x, -y)$ este soluţie.	1p
1.	Este suficient să rezolvăm sistemul pentru cazul $x > 0, y > 0$;	
	Prima ecuaţie se scrie: $x^2 + \log_2 x = y^2 + \log_2 y;(1)$	
	Fie funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$, f este strict crescătoare $\Rightarrow$ f este injectivă;	1p
	$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \overset{f\ \text{injectivă}}{\Rightarrow} x = y$;	
	Sistemul de ecuaţii devine:	
	$\begin{cases} x = y \\ 3^{2\cdot x^2 - 1} - 4 \cdot 3^{x^2} + 9 = 0 \end{cases}$	
	Notăm $3^{x^2} = t, t > 0$	
	$t^2 - 12 \cdot t + 27 = 0 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm\sqrt{2}$;	
	Soluţii sunt: $(1,1);(-1,-1);(\sqrt{2},\sqrt{2});(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	1p

2.	a) Fie AB este o latură a pătratului. Există două pătrate care au ca latură pe AB, situate în semiplane opuse determinate de dreapta AB: ABCD şi ABC′D′. Afixul punctului $A(1,1)$ este $z_A = 1+i$; Afixul punctului $B(4,2)$ este $z_B = 4+2\cdot i$ Pentru a afla coordonatele punctului D, punem condiţia: $z_D - z_A = (z_B - z_A)\cdot i \Leftrightarrow$ $z_D = 1+i+(3+i)\cdot i = 4\cdot i \Rightarrow D(0,4)$; Pentru a afla coordonatele punctului C, punem condiţia: $z_C - z_D = (z_A - z_D)\cdot i \Leftrightarrow z_C = 4\cdot i+(1+i-4i)\cdot i = 3+5i \Rightarrow C(3,5)$; Punctele D si D′ sunt simetrice faţă de punctul A $\Rightarrow z_A = \frac{z_D + z_{D'}}{2} \Rightarrow z_{D'} = 2\cdot z_A - z_D \Rightarrow$ $z_{D'} = 2-2\cdot i \Rightarrow D'(2,-2)$. Punctele C si C′ sunt simetrice faţă de punctul B $\Rightarrow z_B = \frac{z_C + z_{C'}}{2} \Rightarrow z_{C'} = 2\cdot z_B - z_C \Rightarrow$ $z_{C'} = 5-\cdot i \Rightarrow C'(5,-1)$.	**1p** **1p** **1p** **1p**
	b)Fie AB este o diagonală a pătratului. Există pătratul AEBF, unde punctul E este centrul pătratului ABCD, iar F este centrul pătratului ABC′D′. $z_E = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1+i+3+5i}{2} = 2+3i \Rightarrow E(2,3)$; $z_F = \frac{z_A + z_{C'}}{2} = \frac{1+i+5-i}{2} = 3 \Rightarrow F(3,0)$;	**1p** **1p** **1p**
3.	Observăm că funcţia $f(x) = x,\ (\forall) x \in A,$ satisface condiţia din enunţ. Fie A=$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_k$; Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit astfel: $a_0 = x_1,\ a_1 = f(x_1),\ a_2 = f(f(x_1)), ..., a_n = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ ... \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori f}}(x_1)$ $(f \circ f)(x_1) - f(x_1) = f(x_1) - x_1 \Rightarrow a_2 - a_1 = a_1 - a_0$; Analog, $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = a_1 - a_0$. Deducem că: $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = ... = a_1 - a_0$	**2p** **1p** **1p**

	Dar $f(x_1) \in \mathrm{A} \Rightarrow f(x_1) \ge x_1$; Dacă presupunem că $f(x_1) > x_1$, atunci şirul (a_n) este strict crescător, şi cum termenii şirului $(a_n) \in A \Rightarrow$ că mulţimea A ar conţine o infinitate de elemente-fals. Atunci $f(x_1) = x_1$; Funcţia f este injectivă pentru că: din $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow$ $2 \cdot f(x) - x = 2 \cdot f(y) - y \Rightarrow x = y$ Din f injectivă $\Rightarrow \mathrm{f}(x_2) > x_1$. Aplicând procedeul de mai sus pentru x_2, obţinem $\mathrm{f}(x_2) = x_2$; Continuând, prin aplicarea procedeului, obţinem că $\mathrm{f}(x) = x, (\forall) x \in A$.	**1p** 1p 1p
4.	Vom demonstra că $p - \frac{kp-1}{n} > \frac{1}{k},\ 2 \le k \le n-1,\ (1)$ Avem $(1) \Leftrightarrow p \cdot k \cdot n - k^2 \cdot p + k > n \Leftrightarrow k \cdot p \cdot (k-n) - (k-n) < 0 \Leftrightarrow (k-n) \cdot (kp-1) < 0$; pentru $2 \le k \le n-1$, această ultimă inegalitate este adevărată. Din (1) obţinem: $p - \frac{2 \cdot p - 1}{n} > \frac{1}{2}$ $p - \frac{3 \cdot p - 1}{n} > \frac{1}{3}$ .... $p - \frac{(n-1)p-1}{n} > \frac{1}{n-1}$ $p - \frac{np-1}{n} = \frac{1}{n}$ $p - \frac{p-1}{n} \ge 1$ (deoarece $n \cdot p - p + 1 \ge n \Leftrightarrow (p-1) \cdot (n-1) \ge 0 - adevărat$) Înmulţind aceste inegalităţi membru cu membru, obţinem inegalitatea din enunţ.	**3p** **2p**
	Pentru p=1, obţinem $\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n!}$ sau $(n!)^2 > n^n$. Această inegalitate se demonstrează şi prin inducţie matematică, folosind inegalitatea $\mathrm{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \ge 3$.	**2p**