Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $\left.\begin{array}{l} S=1+2+3+...+2015+2016 \\ S=2016+2015+2014+...+2+1 \end{array}\right\} \uparrow \overset{+}{\Longrightarrow} 2\cdot S=(2016+1)\cdot 2016 \Rightarrow$ $S=(2016+1)\cdot 2016:2$	**3p**
	$2017+2\cdot(1+2+3+...+2016)=2017+2\cdot 2017\cdot 2016:2=$ $2017+2017\cdot 2016=2017\cdot(2016+1)=$ 2017^2 =pătrat perfect.	**2p**
	$9^n+9^{n+1}=30\cdot 3^{2015}$ $9^n+9^n\cdot 9=30\cdot 3^{2015}$ $9^n\cdot(1+9)=30\cdot 3^{2015}$ $9^n\cdot 10=30\cdot 3^{2015}$	**1p**
	$9^n=3\cdot 3^{2015}$ $9^n=3^{2016}$ $3^{2n}=3^{2016}$ $2n=2016$ $n=1008.$	**1p**

2.	$\overline{abcd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}-98\cdot\overline{ab}+2\cdot\overline{cd}=2085$ $100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}-98\cdot\overline{ab}+2\cdot\overline{cd}=2085\Rightarrow$ $2\cdot\overline{ab}+3\cdot\overline{cd}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}=2085$ $2\cdot\overline{ab}+\overline{ab}\cdot\overline{cd}+3\cdot\overline{cd}+6=2085+6$ $\overline{ab}\cdot\left(2+\overline{cd}\right)+3\cdot\left(2+\overline{cd}\right)=2091$ $\left(\overline{ab}+3\right)\cdot\left(2+\overline{cd}\right)=2091$ $2091=51\cdot 41$ $\left(\overline{ab}+3\right)\cdot\left(2+\overline{cd}\right)=51\cdot 41$ I. $\begin{cases}\overline{ab}+3=51\\2+\overline{cd}=41\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{ab}=48\\\overline{cd}=39\end{cases}\Rightarrow\ \overline{abcd}=4839$ 2. $\begin{cases}\overline{ab}+3=41\\2+\overline{cd}=51\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{ab}=38\\\overline{cd}=49\end{cases}\Rightarrow\overline{abcd}=3849.$	**2p** **1p** **1p** **1p** **1p** 1p
3.	*a*) Fiecare "etapă" măreşte suma totală a celor patru vârfuri cu 10, deci după 150 etape, suma este 1510.	**3p**
	b) Metoda 1. Suma iniţială din figura 1 este 10. După fiecare etapă, suma numerelor din cele 4 vârfuri se măreşte cu 10, astfel încât după n etape, suma devine $10+10\cdot n=10\cdot\left(n+1\right)=M_{10}$. În figura 2, suma numerelor din cele 4 vârfuri este $8065\neq M_{10}\Rightarrow$ după un anumit număr de etape nu se poate ajunge la figura 2. Metoda 2. Orice "etapă" măreşte suma numerelor corespunzătoare punctelor A şi C cu câte 5 unităţi, notată cu S_{AC} şi suma numerelor corespunzătoate punctelor B şi D tot cu câte 5 unităţi, notată cu S_{BD}. Diferenţa iniţială $S_{BD}-S_{AC}=2,$ această diferenţă rămâne neschimbată după fiecare etapă. (diferenţa dintre sumele pe diagonale este aceeaşi 2, după fiecare etapă). În figura 2 avem: $S_{BD}-S_{AC}=7,$ ceea ce nu este posibil, deci nu se poate.	**2p** **1p** 1p
4.	a) $5^3=5^2+10^2\Rightarrow 125$ este cub bipătratic; $3^2=1^3+2^3\Rightarrow 9$ este pătrat bicubic;	**2p** **1p**
	b)Fie a,b $\in\mathbb{N}^*, a\neq b$ şi $a^2+b^2=k, k\in\mathbb{N}^*$; $a^2+b^2=k\,/\cdot k^2\Rightarrow a^2\cdot k^2+b^2\cdot k^2=k^3\Rightarrow\left(a\cdot k\right)^2+\left(b\cdot k\right)^2=k^3\Rightarrow k^3$este cub bipătratic cu condiţia ca numărul k $\in\mathbb{N}^*$ să fie suma a două pătrate perfecte, nenule, diferite. Cum a,b $\in\mathbb{N}^*, a\neq b$ şi oarecare $\Rightarrow$ există $k=a^2+b^2$, k $\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea $k^3=\left(a\cdot k\right)^2+\left(b\cdot k\right)^2\Rightarrow$ există o infinitate de numere cuburi bipătrate.	**2p**
	Fie a, b $\in\mathbb{N}^*$, $a\neq b$ şi $a^3+b^3=t, t\in\mathbb{N}^*$; $a^3+b^3=t\,/\cdot t^3\Rightarrow\left(a\cdot t\right)^3+\left(b\cdot t\right)^3=\left(t^2\right)^2\Rightarrow t^4$ este pătrat bicubic cu condiţia ca numărul t să fie suma a două cuburi perfecte, nenule, diferite.	**2p**