

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. probleme mei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1	a) Fiecare din numerele $15 \cdot a$; $35 \cdot b$; 2015 se divide cu $5 \Rightarrow (91 \cdot c):5 \Rightarrow c = 5$ (număr prim). Egalitatea devine: $15 \cdot a + 35 \cdot b + 455 = 2015 \Rightarrow 15 \cdot a + 35 \cdot b = 1560 \Rightarrow 3 \cdot a + 7 \cdot b = 312 \Rightarrow (7 \cdot b):3 \Rightarrow b = 3$; Înlocuind pe $b=3$ în egalitatea $3 \cdot a + 7 \cdot b = 312 \Rightarrow 3 \cdot a = 291 \Rightarrow a = 97$. Așadar, $a=97$; $b=3$; $c=5$	1p 1p 1p
	b) Numerele de trei cifre, cuburi perfecte, sunt: $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$. Le analizăm pe rând și vedem care permutare a cifrelor formează numere prime.	1p
	1) $5^3 = 125 \Rightarrow$ numerele prime sunt: 521 și 251 (celelalte variante sunt numere compuse);	1p
	2) $6^3 = 216 \Rightarrow$ nici un număr prim (suma cifrelor se divide cu 3);	
	3) $7^3 = 343 \Rightarrow$ 433 este număr prim;	
4) $8^3 = 512 \Rightarrow$ numerele prime sunt: 521, 251 (soluție de la punctul 1);	1p	
5) $9^3 = 729 \Rightarrow$ nici un număr prim (suma cifrelor se divide cu 3). Așadar, există trei numere prime: 521, 251, 433.	1p	
2	Fie $m(\angle FOX) = m(\angle BOX) = a$; $m(\angle FOE) = 90^\circ$, $m(\angle AOE) = 90^\circ - 2 \cdot a$	3p
	Condiția din ipoteză se scrie: $90^\circ - 2 \cdot a + 15 = 90^\circ - a \Rightarrow a = 15^\circ$	3p
	Așadar, $m(\angle AOE) = 60^\circ$, $m(\angle XOE) = 105^\circ$	1p
	$\overline{abc} = n \cdot (17 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c)$, $n \in \mathbb{N}^*$	1p
	Observăm că $n \leq 5$ deoarece pentru $n \geq 6$, membrul drept este mai mare decât cel stâng;	1p

3	<p>1) $n=5 \Rightarrow 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 85 \cdot a + 10 \cdot b + 10 \cdot c \Rightarrow 15 \cdot a = 9 \cdot c \Rightarrow a=3, c=5 \Rightarrow$ numerele: 305, 315, 325, ..., 395</p> <p>2) $n=4 \Rightarrow 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 68 \cdot a + 8 \cdot b + 8c \Rightarrow 32 \cdot a + 2 \cdot b = 7 \cdot c \Rightarrow c:2 \Rightarrow 7 \cdot c \geq 32 \Rightarrow c \in \{6, 8\};$ Dacă $c = 6 \Rightarrow a = 1, b = 5 \Rightarrow 156$ Dacă $c = 8 \Rightarrow a = 1, b = 12$ – nu convine</p> <p>3) $n=3 \Rightarrow 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 51 \cdot a + 6 \cdot b + 6 \cdot c \Rightarrow 49 \cdot a + 4 \cdot b = 5 \cdot c \Rightarrow$ imposibil;</p> <p>4) $n \in \{1, 2\} \Rightarrow$ nu se obțin soluții, membrul stâng este prea mare.</p> <p>Numerele căutate sunt: 305, 315, 325, ..., 395, 156.</p>	<p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	4	<p>a) $\frac{7}{21};$ $\frac{14}{35}$</p>
<p>Toate fracțiile din șir sunt de forma $\frac{n+4}{2 \cdot n+15}, n \in \mathbb{N}.$</p> <p>Dacă o fracție este reducibilă, atunci există $d \in \mathbb{N}^*, d > 1$, astfel ca</p> $\begin{cases} (n+4):d \\ (2 \cdot n+15):d \end{cases} \Rightarrow 7:d \Rightarrow d = 7; \text{ (O fracție din șir este reducibilă eventual prin 7).}$		<p>1p</p> <p>1p</p>
<p>Pentru a fi reducibilă prin 7, trebuie ca $(n+4):7 \Rightarrow n = 7 \cdot k - 4, k \in \mathbb{N}^*.$</p> <p>Pentru $n = \overline{0, 2015}$, obținem numerele 3, 10, 17, ..., 2012 de forma $7 \cdot k - 4$, adică exact 288 fracții sunt reducibile din primele 2016 fracții din șir.</p>		<p>1p</p> <p>1p</p>