

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie-2016

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a) a = \frac{4}{3^n + 3^{n+1}} = \frac{4}{3^n + 3^n \cdot 3} = \frac{4}{3^n \cdot (1+3)} = \frac{4}{3^n \cdot 4} = \frac{1}{3^n};$	1p
	$b) b = \frac{13}{3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}} = \frac{13}{3^n \cdot (1+3+3^2)} = \frac{13}{3^n \cdot 13} = \frac{1}{3^n};$	1p
	$a = b;$	1p
1.	$b) \text{Calculăm } S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n / \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot S = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + 3^{n+1};$	1p
	$\left. \begin{array}{l} S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n \\ 3 \cdot S = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + 3^{n+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \\ \Rightarrow \end{array} \Rightarrow 2 \cdot S = 3^{n+1} - 3 \Rightarrow S = \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{2};$	
	$3^n + (-3)^n - 9^n - (-9)^n = 3^n \cdot (1 + (-1)^n) - 9^n \cdot (1 + (-1)^n) = -3^n \cdot (1 + (-1)^n) \cdot (3^n - 1)$	1p
	$c = \frac{-3^n \cdot (1 + (-1)^n) \cdot (3^n - 1)}{3 \cdot \frac{3^n - 1}{2}} = -3^n \cdot (1 + (-1)^n) \cdot (3^n - 1) \cdot \frac{2}{3 \cdot (3^n - 1)} = -2 \cdot 3^{n-1} \cdot (1 + (-1)^n) =$	1p
	$= \begin{cases} 0, n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -2^2 \cdot 3^{n-1}, n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$	1p
	$1. n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (-6 \cdot c) \cdot (a + b) = (-6) \cdot (-2^2) \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{2}{3^n} = 2^4 = 16 = p \cdot p;$	1p
	$2. n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (-6 \cdot c) \cdot (a + b) = 0 = p \cdot p.$	
2.	$E = \frac{7+a}{1+a+ab+abc} + \frac{7+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{7+c}{1+c+cd+cda} + \frac{7+d}{1+d+ad+dab}$	2p
	$b-c) \frac{7+a}{1+a+ab+abc} = \frac{7bcd+1}{bcd+abcd+ab^2cd+ab^2c^2d} = \frac{7bcd+1}{bcd+1+b+bc};$	
	$b) \frac{7+c}{1+c+cd+cda} = \frac{7b+cb}{b+bc+bcd+1};$	2p
	$b-c) \frac{7+d}{1+d+ad+dab} = \frac{7bc+bcd}{bc+bcd+abcd+ab^2cd} = \frac{7bc+bcd}{bc+bcd+1+b}$	2p
	$\frac{7bcd+1}{bcd+1+b+bc} + \frac{7+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{7b+cb}{b+bc+bcd+1} + \frac{7bc+bcd}{bc+bcd+1+b} = \frac{8+8 \cdot b+8 \cdot bc+8bcd}{1+b+bc+bcd} = 8$	1p

<p>3.</p>	<p>a) $[AF]$-bisectoarea $\angle DAB, F \in (DC) \Rightarrow \angle DAF \equiv \angle FAB$ (1)</p> $\begin{cases} DC \parallel AB \\ \text{secanta } AF \end{cases} \Rightarrow \angle DFA \equiv \angle FAB (\angle - \text{uri alt. int.})$ (2) <p>Din 1 și 2 $\Rightarrow \angle DAF \equiv \angle DFA \Rightarrow \triangle ADF$ - \triangleisoscel $\Rightarrow [AD] \equiv [DF]$;</p> <p>$[BF]$-bisectoarea $\angle CBA, F \in (DC) \Rightarrow \angle CBF \equiv \angle FBA$ (3)</p> $\begin{cases} DC \parallel AB \\ \text{secanta } BF \end{cases} \Rightarrow \angle CFB \equiv \angle FBA$ (4) <p>Din 3 și 4 $\Rightarrow \angle CBF \equiv \angle CFB \Rightarrow \triangle CBF$ - \triangleisoscel $\Rightarrow [BC] \equiv [CF]$;</p> <p>$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow [AD] \equiv [BC]$;</p> $\begin{cases} [AD] \equiv [DF] \\ [BC] \equiv [CF] \Rightarrow [DF] \equiv [CF] \Rightarrow AD = \frac{1}{2} \cdot CD; \\ [AD] \equiv [BC] \end{cases}$ <p>Fie $E \in (AB), EA = EB = \frac{1}{2} \cdot AB = AD$;</p> $\begin{cases} AE = AD = DF \\ AE \parallel DF \end{cases} \Rightarrow AEF D - \text{romb}$ $\begin{cases} FC = BC = EB \\ BE \parallel CF \end{cases} \Rightarrow BEFC - \text{romb}$ <p>În triunghiul $\triangle AFB, [FE]$ mediană $\Rightarrow A_{\triangle FEB} = A_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle AFB} = \frac{25}{2} \text{ cm}^2$;</p> <p>$AEFD - \text{romb} \Rightarrow \triangle AEF \equiv \triangle ADF \Rightarrow A_{\triangle AEF} = A_{\triangle ADF} = \frac{25}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\square AEF D} = 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\square ABCD} = 50 \text{ cm}^2$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>b) $ABCD$ paralelogram, fie $AC \cap BD = \{O\}, AO = OC, BO = OD$;</p> <p>În triunghiul $\triangle ADC: [AF]$ mediană, $[DO]$ mediană, $AF \cap DO = \{P\} \Rightarrow P$ este centrul de greutate al $\triangle ADC \Rightarrow$</p> $\frac{AP}{PF} = \frac{2}{1}; (1)$ <p>În triunghiul $\triangle BDC: [BF]$ mediană, $[CO]$ mediană, $BF \cap CO = \{Q\} \Rightarrow Q$ este centrul de greutate al $\triangle BDC \Rightarrow$</p> $\frac{BQ}{QN} = \frac{2}{1}; (2)$ <p>Din 1 și 2 $\Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{BQ}{QN} \stackrel{R.T.Th}{\Rightarrow} PQ \parallel AB \parallel DC$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

4.	<p>Fie $P \in (AB)$, $[AP] \equiv [PB]$;</p> <p>Fie $Q \in (MN)$, $[MQ] \equiv [QN]$;</p> <p>Fie $AE \parallel NQ$ și $[AE] \equiv [NQ] \Rightarrow AEQN$ este paralelogram $\Rightarrow [EQ] \equiv [AN]$ (1)</p> <p>Fie $BF \parallel MQ$ și $[BF] \equiv [MQ] \Rightarrow BMQF$ este paralelogram $\Rightarrow [BM] \equiv [FQ]$ (2)</p> <p>Dar $[BM] \equiv [AN]$ (3)</p> <p>Din 1, 2 și 3 $\Rightarrow [FQ] \equiv [EQ] \Rightarrow \triangle QEF$ este isoscel;</p> <p> $\begin{cases} [AE] \equiv [NQ] \\ AE \parallel NQ \\ BF \parallel MQ \Rightarrow AEBF \text{ este paralelogram, unde } AB \cap EF = \{P\}, [EP] \equiv [PF] \\ [BF] \equiv [MQ] \\ [MQ] \equiv [NQ] \end{cases}$ </p> <p> $\begin{cases} \triangle QEF \text{ este isoscel} \\ [EP] \equiv [PF] \end{cases} \Rightarrow [QP] \text{ este bisectoarea } \sphericalangle EQF;$ </p> <p> $\begin{cases} EQ \parallel AN \\ FQ \parallel BM \\ EQ \cap BT = \{U\} \\ FQ \cap AT = \{V\} \end{cases} \Rightarrow TUQV \text{ este paralelogram } \Rightarrow \sphericalangle EQF \equiv \sphericalangle VQU \equiv \sphericalangle ATB \Rightarrow$ </p> <p>QP este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle ATB$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
----	---	---