

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
	$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2 + 3 + 5 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$ $10 + 2 \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot \sqrt{15};$ $(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2 + 3 + 5 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$ $10 - 2 \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot \sqrt{15};$ $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2 + 3 + 5 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$ $10 - 2 \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{10} - 2 \cdot \sqrt{15};$ $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = 2 + 3 + 5 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$ $10 + 2 \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{10} - 2 \cdot \sqrt{15};$ $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = 40;$	2p
1.	$2 \cdot \sqrt{6} - (-\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4}) \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) =$ $2 \cdot \sqrt{6} - (-1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2) =$ $2 \cdot \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3) = 2 \cdot \sqrt{6} - [(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 9] =$ $2 \cdot \sqrt{6} - (2 + 3 + 2 \cdot \sqrt{6} - 9) = 2 \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{6} + 4 = 4;$	1p
	$(\sqrt{2015} - \sqrt{2016})^2 - (\sqrt{2015} + \sqrt{2016})^2 =$ $(\sqrt{2015} - \sqrt{2016} - \sqrt{2015} - \sqrt{2016}) \cdot (\sqrt{2015} - \sqrt{2016} + \sqrt{2015} + \sqrt{2016}) =$ $-2 \cdot \sqrt{2016} \cdot 2 \cdot \sqrt{2015} = -4 \cdot \sqrt{2016} \cdot \sqrt{2015};$	1p
	$(2015 \cdot \sqrt{2016} - 2016 \sqrt{2015}) \cdot (\sqrt{2015} + \sqrt{2016}) =$ $\sqrt{2016} \cdot \sqrt{2015} \cdot (\sqrt{2015} - \sqrt{2016}) \cdot (\sqrt{2015} + \sqrt{2016}) =$ $\sqrt{2016} \cdot \sqrt{2015} \cdot (2015 - 2016) = -\sqrt{2016} \cdot \sqrt{2015};$	1p

	$0,5^{-2} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4;$	1p
	$n = \frac{40}{4} : 4 \cdot 4 = 10;$ Se calculează $\sqrt{10} = 3,16\dots$ $-\sqrt{10} = -3,16\dots;$ $-\pi = -3,14\dots;$ Asadar, $-\sqrt{10} < -\pi.$	1p
2.	$[x] = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \leq x < k + 1;$	3p
	$(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n > 0 \Rightarrow 4 \cdot n^2 + n > 4 \cdot n^2; \quad (1)$	1p
	$(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 4 \cdot n^2 + n < 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1; \quad (2)$	1p
	Din 1 și 2 $\Rightarrow 4 \cdot n^2 < 4 \cdot n^2 + n < 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 \Leftrightarrow$ $2 \cdot n < \sqrt{4n^2 + n} < 2 \cdot n + 1 \Leftrightarrow$ $\left[\sqrt{4n^2 + n} \right] = 2n;$ $a = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n + 1)^2 + n^2.$	2p 1p
3.	Se împarte fiecare muchie a paralelipedului dreptunghic în n părți egale, obținându-se astfel n^3 paralelipede dreptunghice de dimensiuni: $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}.$	3p
	Diagonala unui astfel de paraleliped dreptunghic este $\frac{1}{n} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$	1p
	Aplicăm principiul lui Dirichlet celor $n^3 + 1$ puncte distincte și celor n^3 paralelipede dreptunghice.	2p
	Rezultă că există cel puțin 2 puncte într-un paraleliped din cele n^3 paralelipede dreptunghice. Atunci distanța dintre cele două puncte este mai mică sau egală cu diagonala acestui paraleliped dreptunghic, care este $\frac{1}{n} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$	1p

	<p>a) Fie $AC \cap BD = \{O\}$;</p> $\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ NC \perp (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \parallel NC \Rightarrow MA, NC \text{ drepte coplanare};$ $\left\{ \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AO \perp BD \quad T.3.\perp \\ AO, BD \subset (ABC) \end{array} \right. \Rightarrow MO \perp BD;$ $\left\{ \begin{array}{l} BO \perp AC \\ BO \perp MO \Rightarrow BO \perp (MAC); \\ AC \cap MO = \{O\} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} BO \perp (MAC) \\ BO \subset (MBD) \end{array} \right. \Rightarrow (MBD) \perp (MAC)$ $\left\{ \begin{array}{l} BO \perp (MAC) \\ BO \subset (NBD) \end{array} \right. \Rightarrow (NBD) \perp (MAC).$	<p>2p</p> <p>1p</p>
<p>4.</p>	<p>b). În $\triangle MAO$, fie $AP \perp MO, P \in MO$;</p> $\left\{ \begin{array}{l} AP \perp PO \\ PO \perp BD \quad R2.T.3.\perp \\ PO, BD \subset (MBD) \end{array} \right. \Rightarrow AP \perp (MBD);$ $\left\{ \begin{array}{l} AP \perp (MBD) \\ MB \subset (MBD) \end{array} \right. \Rightarrow AP \perp MB;$ $\left\{ \begin{array}{l} AD \perp AB \\ AD \perp MA \Rightarrow AD \perp (MAB); \\ AB \cap AM = \{A\} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} AD \perp (MAB) \\ MB \subset (MAB) \end{array} \right. \Rightarrow AD \perp MB; \left\{ \begin{array}{l} AP \perp MB \\ AD \perp MB \Rightarrow MB \perp (ADP); \\ AP \cap AD = \{A\} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} MB \perp (ADP) \\ DP \subset (ADP) \end{array} \right. \Rightarrow MB \perp DP;$ $\triangle MBD: \left\{ \begin{array}{l} MO \perp BD \\ DP \perp MB \Rightarrow P = \text{ortocentrul triunghiului } \triangle MBD; \\ MO \cap DP = \{P\} \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} AP \perp (MBD) \\ P = \text{ortocentrul triunghiului } \triangle MBD \end{array} \right\} \Rightarrow pr_{(MBD)}A = P - \text{ortocentrul triunghiului } \triangle MBD;$ <p>Analog se demonstrează că $pr_{(BND)}C = Q$, unde Q este ortocentrul $\triangle BDN$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>

	<p> $c) AE = \frac{1}{4} AC = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot AO \Rightarrow AE = EO; AP \perp MO \Rightarrow \triangle APO: m(\angle APO) = 90^\circ;$ $\begin{cases} \triangle APO: m(\angle APO) = 90^\circ \\ PE \text{ mediană} \end{cases} \Rightarrow PE = OE = EA = \frac{1}{4} \cdot AC;$ $AF = \frac{3}{4} \cdot AC \Rightarrow AC - CF = \frac{3}{4} \cdot AC \Rightarrow CF = \frac{1}{4} \cdot AC; CQ \perp NO \Rightarrow \triangle CQO: m(\angle CQO) = 90^\circ;$ $\begin{cases} \triangle CQO: m(\angle CQO) = 90^\circ \\ QF \text{ mediană} \end{cases} \Rightarrow QF = OF = CF = \frac{1}{4} \cdot AC;$ $PE + QF = \frac{1}{2} \cdot AC = \text{constant.}$ </p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
--	---	-----------------------------------