Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie-2016

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- ♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- ♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Demonstrăm prin inductie matematică: $\mathrm{P}(n)$: $\left(13^n+7^n-2\right)\vdots 9,\ (\forall)n\in\mathbb{N}$ I. $\mathrm{P}(0): 13^0+7^0-2=0\vdots 9\,(A)$;	 **1p**
	II.$\mathrm{P}(n)\to \mathrm{P}(n+1),(\forall)n\in\mathbb{N}$; $\mathrm{P}(n+1):\left(13^{n+1}+7^{n+1}-2\right)\vdots 9$	 **1p**
	$13^{n+1}+7^{n+1}-2=13^n\cdot 13+7^n\cdot 13-26-7^n\cdot 6+24=13\cdot\underbrace{\left(13^n+7^n-2\right)}_{\vdots 9}-6\cdot\left(7^n-4\right)$;	**1p**
	$6\cdot\left(7^n-4\right)\vdots 3\ (1)$ $7^n-4=(6+1)^n-4=M_3+1-4=M_3-3=M_3\Rightarrow\left(7^n-4\right)\vdots 3,\ (\forall)n\in\mathbb{N}\ (2)$	 **2p**
	Din 1 şi 2 $\Rightarrow 6\cdot\left(7^n-4\right)\vdots 9,(\forall)n\in\mathbb{N}$;	**1p**
	Aşadar $\mathrm{P}(n+1)$ este adevărată; Conform principiului inducţiei matematice $\Rightarrow \mathrm{P}(n)$ este propoziţie adevărată, $(\forall)n\in\mathbb{N}$	**1p**
2.	Presupunem prin metoda reducerii la absurd că există m, n, p $\in\mathbb{N}^*$, m<n<p, astfel încât $\sqrt{11}=a_m=a_1+(m-1)\cdot r$ $\sqrt{13}=a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ $\sqrt{15}=a_p=a_1+(p-1)\cdot r,\ r>0$ este raţia progresiei aritmetice.	**2p**
	$\begin{cases}\sqrt{13}-\sqrt{11}=(n-m)\cdot r\\ \sqrt{15}-\sqrt{11}=(p-m)\cdot r\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}=\dfrac{n-m}{p-m}\overbrace{=q\in\mathbb{Q}_+^*}^{not}\Rightarrow\sqrt{13}-\sqrt{11}=q\cdot\sqrt{15}-q\cdot\sqrt{11}\Leftrightarrow$ $(q-1)\cdot\sqrt{11}=q\cdot\sqrt{15}-\sqrt{13}\Rightarrow 11\cdot(q-1)^2=15\cdot q^2-2\cdot q\sqrt{195}+13\Leftrightarrow 2\cdot q\sqrt{195}=4\cdot q^2+22\cdot q+2,$	**3p**
	de unde, prin împărţire cu $2q\in\mathbb{Q}_+^*$, obţinem: $\sqrt{195}=\dfrac{2\cdot q^2+11\cdot q+1}{q}\in\mathbb{Q}$, contradicţie. Aşadar, presupunerea făcută este falsă, de unde rezultă că numerele $\sqrt{11},\sqrt{13},\sqrt{15}$ nu pot fi printre termenii unei progresii aritmetice.	**2p**

3.	Deoarece 2016>0 şi $\lvert x+y\rvert \geq 0 \Rightarrow \lvert x+y\rvert > 0$ şi $\left[\dfrac{6\cdot x}{x^2+9}\right] > 0\ (1)$ Dar $x^2+9 \geq \pm 6\cdot x, (\forall) x\in\mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \dfrac{6\cdot x}{x^2+9} \leq 1 \Rightarrow \left[\dfrac{6\cdot x}{x^2+9}\right] \in \{-1,0,1\}(2)$ Din 1 şi 2 $\Rightarrow \left[\dfrac{6\cdot x}{x^2+9}\right] = 1(3)$ Din $\begin{cases} \left[\dfrac{6\cdot x}{x^2+9}\right] > 0 \\ \left[\dfrac{6\cdot x}{x^2+9}\right] = 1 \\ -1 \leq \dfrac{6\cdot x}{x^2+9} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{6\cdot x}{x^2+9} = 1 \Rightarrow x = 3;$ Ecuaţia devine $\lvert 3+y\rvert = 2016 \Rightarrow 3+y = \pm 2016 \Rightarrow y \in \{2013, -2019\};$ Aşadar $(x,y) \in \{(3,2013);(3,-2019)\}$.	**2p** **2p** **1p** **1p** **1p**
4.	Fie Q mijlocul lui $[AE]$. Deoarece P este centrul cercului circumscris triunghiului ADE $\Rightarrow$ PQ este mediatoarea segmentului $[AE]$. Din $O = S_{AE}(P) \Rightarrow$ Q este mijlocul segmentului $[PO]$. Se obține că APEO este romb (1) Deoarece unghiul $\measuredangle$ADE este înscris în cerc și are $m(\measuredangle ADE) = 45° \Rightarrow m(\measuredangle APE) = 90°(2)$ Din 1 și 2 $\Rightarrow$ APEO este pătrat. $\begin{cases} m(\measuredangle DAP) = 90° - m(\measuredangle BAP) = m(\measuredangle OAB) \\ \text{Din } [AB] \equiv [AD], \text{ respectiv } [OA] \equiv [AP] \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \equiv \triangle PAD \Rightarrow [PA] \equiv [PD] \equiv [OA] \equiv [OB] \equiv [OE] \Rightarrow$ O este centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle$AEB, iar din relația lui Sylvester $\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **2p**