CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI

Filiera tehnologică : profil servicii, și resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

I

Fie $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \{3,4\}$ şi $B = A - {}^tA$ unde ${}^tA$ este transpusa matricei A

Demonstrați că:

a) Dacă $n = 3$, atunci $det(B) = 0$.

b) Dacă $n = 4$, atunci $det(B) \geq 0$.

II

a) Fie $X = M_2(\mathbb{C})$. Arătați că: $det(X + I_2) = det(X - I_2) \Leftrightarrow tr(X) = 0$.

b) Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $det(A + I_2) = det(A - I_2)$ şi

$det(A^{2008} + I_2) = det(A^{2008} - I_2)$, arătați că $A^2 = O_2$.

($tr(X)$ este egală cu suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X)

III

Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

1) $f(x) \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1 + f(x)}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Arătați că:

a) $f(x) \leq \frac{f(2^{n+1} \cdot x)}{2^{n+1}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

IV

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi care satisface condițiile:

1) $f'(0) = 1$

2) $f(x + t) = e^x \cdot f(t) + e^t \cdot f(x),\ \forall x, t \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $f'(x) - f(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - x$ este constantă pe $\mathbb{R}$.

c) Determinați funcția *f*.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7