CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

X. OSZTÁLY

I

a) Igazoljátok,hogy, ha $x \in (0,1)$ és $y \in \mathbb{R}$, akkor: $log_2 x + log_x 2 \le -2 \le -2\, sin\, y$.

b) Igazoljátok,hogy, ha: $x \in (1,\infty)$ şi $y \in \mathbb{R}$, akkor $log_2 x + log_x 2 \ge 2 \ge -2\, sin\, y$.

c) Határozzátok meg azon (x, y) elempárokat,ahol $x \in (0,\infty)$ şi $y \in \mathbb{R}$ úgy,hogy $log_2 x + log_x 2 + 2\, sin\, y = 0$.

II

Adott $\alpha = cos\frac{\pi}{1004} + i\, sin\frac{\pi}{1004} \in \mathbb{C}$.

Igazoljátok. hogy $\sum_{k=1}^{2008} \frac{\left|z-\alpha^k\right|^2}{1+|z|^2} = 2008,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

III

Adott az $ABCDEF$ hatszög és M, N, P, Q, R, S az $[AB],[BC],[CD]$, $[DE],[EF],[FA]$ oldalak felezőpontjai. Igazoljátok,hogy:

a) $2\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$;

c) Egy szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\left|\overrightarrow{RN}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PS}\right|^2$ az, hogy (MQ) és (PS) merőlegesek legyenek.

IV

Egy síkban felveszünk 5 pontot ,úgy, hogy bármely három közülük nem kollineáris. A pontokat kettőnként összekötjük egy piros, vagy kék vonallal, úgy, hogy egyetlen olyan háromszöget se alkossunk amelynek oldalai ugyanolyan színűek.

Igazoljátok, hogy:

a) Minden pontból legfennebb két azonos színű vonal indul ki;

b) Minden pontból csak két-két azonos színű vonal indul ki;

c) Úgy a piros mint a kék szakaszok egy-egy olyan zárt sokszögvonalat (sokszöget) alkotnak, amelyek tartalmazzák mind az 5 pontot.

Megjegyzés: munkaidő 3 óra
Minden tétel kötelező
Minden tételt 0-tól 7 pontig osztályozunk