

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI

Filiera tehnologică : profil servicii, și resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

I

a) Calculați $\int_a^b \frac{dx}{2^x + 1}$ pentru $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că nu există $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ astfel încât $\int_a^b \frac{dx}{2^x + 1} \in \mathbb{N}$.

II

Determinați polinomul $P(x)$ cu coeficienți reali astfel încât:

1) $x \cdot P(x) = (x - 2008) \cdot P(x + 2008)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

2) $P(0) = -2008$.

III

Fie $G = \{M(x, y) / y = x^2 + 2x + 5, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$. Pe mulțimea G definim operația

$*$: $G \times G \rightarrow G$ astfel:

$\forall M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2) \in G$, $M_1 * M_2 = M$, unde $x_M = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

a) Arătați că operația $*$ este corect definită.

b) Demonstrați că $(G, *)$ este grup comutativ izomorf cu (\mathbb{R}^*, \cdot) .

IV

Arătați că $\int_0^2 \sqrt{x} \cdot \sin(\pi x) dx < 0$.

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7