CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

XI.OSZTÁLY

I

Adott az $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \{3,4\}$ és $B = A - {}^tA$, ahol ${}^tA$ az A mátrix transzponáltja

Igazoljátok,hogy:

a) Ha $n = 3$, akkor $det(B) = 0$.

b) Ha $n = 4$, akkor $det(B) \geq 0$.

II

a) Adott $X = M_2(\mathbb{C})$ mátrix. Igazoljátok, hogy: $det(X + I_2) = det(X - I_2) \Leftrightarrow tr(X) = 0$.

b) Ha $A \in M_2(\mathbb{C})$ úgy, hogy $det(A + I_2) = det(A - I_2)$ és

$det(A^{2008} + I_2) = det(A^{2008} - I_2)$, akkor igazoljátok, hogy $A^2 = O_2$.

($tr(X)$ az X mátrix főátlója mentén levő elemeinek összege)

III

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, úgy, hogy:

1) $f(x) \leq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1 + f(x)}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Igazoljátok, hogy:

a) $f(x) \leq \frac{f(2^{n+1} \cdot x)}{2^{n+1}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

IV

Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-en deriválható függvény, amely teljesíti a következő feltételeket:

1) $f'(0) = 1$

2) $f(x + t) = e^x \cdot f(t) + e^t \cdot f(x),\ \forall x, t \in \mathbb{R}$.

a) Igazoljátok, hogy $f'(x) - f(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Igazoljátok, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - x$ függvény állandó (konstans) $\mathbb{R}$-en.

c) Határozzátok meg az *f* függvényt .

Megjegyzés: munkaidő 3 óra
Minden tétel kötelező.
Minden tételt 0-tól 7 pontig osztályozunk.