CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI

Profil real, specializarea ştiințele naturii

XII. OSZTÁLY

1. Adott $\mathbb{Q}(i)=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, ahol i az egységnyi imaginárius rész.

a) Igazoljátok, hogy $\mathbb{Q}(i)$ testet alkot a komplex számok összeadásával és szorzásával.

b) Az így kapott test izomorf-e a $(\mathbb{Q},+,\cdot)$? testtel

2. Ha $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, akkor adott a következő függvény: $f(x)=-2x^2\int_0^1\frac{dt}{(1-x^2t)(1+x^2t)}$.

a) Igazoljátok, hogy $f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2},\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

b)Keressétek meg annnak az f függvénynek a primitív függvényét, amelynek grafikus képe átmegy az origón.

3. Tudva, hogy $a>0$ és $c<0$, állapítsátok meg a $P=X^6+aX^4+bX^2+c\in\mathbb{R}[X]$. polinom valós gyökeinek számát

4. Adott az $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$ egyenletű síkgörbe, ahol $a,b>0.$

a) Írjátok fel az adott görbét, két függvény grafikonjának egyesítéseként.

b) Határozzátok meg az adott síkgörbe által határolt felület területét.

Megjegyzés: munkaidő 3 óra
Minden tétel kötelező.
Minden tételt 0-tól 7 pontig osztályozunk.