# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
# *"ADOLF HAIMOVICI"*
# ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI

**Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului**

## CLASA A X-A

I

a) Demonstrați că dacă $x \in (0,1)$ şi $y \in \mathbb{R}$, atunci: $log_2 x + log_x 2 \le -2 \le -2\sin y$.

b) Demonstrați că dacă: $x \in (1,\infty)$ şi $y \in \mathbb{R}$, atunci $log_2 x + log_x 2 \ge 2 \ge -2\sin y$.

c) Determinați perechile $(x, y)$, $x \in (0,\infty)$ şi $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $log_2 x + log_x 2 + 2\sin y = 0$.

II

Fie $\alpha = \cos\frac{\pi}{1004} + i\sin\frac{\pi}{1004} \in \mathbb{C}$.

Demonstrați că $\sum_{k=1}^{2008} \frac{\left|z-\alpha^k\right|^2}{1+|z|^2} = 2008,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

III

Fie un hexagon *ABCDEF* şi *M, N, P, Q, R, S* mijloacele laturilor $[AB]$,$[BC]$,$[CD]$, $[DE]$,$[EF]$,$[FA]$. Demonstați că:

a) $2\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$;

c) O condiție necesară şi suficientă pentru ca $\left|\overrightarrow{RN}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PS}\right|^2$ este ca $(MQ)$ şi $(PS)$ să fie perpendiculare.

IV

Într-un plan se consideră 5 puncte astfel încât oricare trei nu sunt coliniare. Oricare două puncte se unesc între ele fie printr-o linie roşie, fie printr-o linie albastră, astfel încât să nu se formeze nici un triunghi monocolor.

Arătați că:

a) Din fiecare punct pleacă cel mult două linii de aceeaşi culoare;

b) Din fiecare punct pleacă exact câte două linii de fiecare culoare;

c) Atât segmentele roşii cât şi cele albastre formează câte o linie poligonală închisă care conține toate cele 5 puncte.

**Nota:** Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7