

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI
Profil real, specializarea științele naturii

XI. OSZTÁLY

1. Adottak az a, b, c szigorúan pozitív valós számok, úgy, hogy $|b - c| < a < b + c$. Adott az

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}, \text{ egyenletrendszer, ahol } x, y, z \text{ az ismeretlenek}$$

a) Igazoljátok, hogy az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

b) Igazoljátok, hogy x_0, y_0, z_0 olyan valós számok, amelyeknek modulusza kisebb mint 1.

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény amely az $f(x) = f(2x), \forall x \in \mathbb{R}$ tulajdonsággal rendelkezik

a) Igazoljátok, hogy az $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ függvény rendelkezik a kijelentésben megadott tulajdonsággal.

b) Igazoljátok, hogy: $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Határozzátok meg azon folytonos függvényeket, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal.

3. Egy fényforrás az S pontban van felfüggesztve, a $20\sqrt{2}$ méter sugarú körlap O középpontjába, x méter magasságban. A fényerősség, a körlap egy bizonyos M pontjában az x függvényében változik a következő törvény szerint: $I(x) = k \frac{\sin \alpha}{d^2}$, ahol k egy konstans, $d = SM$, valamint $\alpha = m(\hat{SMO})$. Határozzátok meg x -et, úgy, hogy a fényerősség a körlap egy bizonyos szélső pontjában (a külső kerületén) maximális legyen.

4. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Cătălin az A mátrixból kindulva új mátrixokat alkot a

következőképpen:

- az első szakaszban kiválaszt az A mátrixból 5 elemet, amelyeknek megváltoztatja az előjelét;
- ezután, elvégezheti az alábbi műveletek bármelyikét, ahányszor csak akarja: vagy hozzáadja egy adott sor elemeihez egy másik sor elemeit, vagy hozzáadja egy adott oszlop elemeit egy másik oszlop elemeihez.

a) Igazoljátok, hogy az első szakasz után kapott mátrix determinánsa 0, 4 vagy -4.

b) Megkaphatja-e Cătălin, egy adott pillanatban a B mátrixot, ahol $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Megjegyzés: munkaidő 3 óra

Minden tétel kötelező.

Minden tételt 0-tól 7 pontig osztályozunk.