Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediţia a XX-a
Galaţi, 2 noiembrie 2019

Clasa a XI –a

SOLUŢII

Problema 3.
Soluţie.

a) Fie $z=1+i\cdot n \Rightarrow z=\sqrt{n^2+1}\left(\cos arctg\, n+i\cdot\sin arctg\, n\right)$

$z^{2018}=\left(\sqrt{n^2+1}\right)^{2018}\cdot\left(\cos\left(2018\cdot arctg\, n\right)+i\cdot\sin\left(2018\cdot arctg\, n\right)\right)$

$z^{2018}=\left(1+i\cdot n\right)^{2018}=a_{2018}+i\cdot b_{2018}$, $a_{2018}\in\mathbb{Z}$ **şi** $b_{2018}\in\mathbb{Z}$.

Rezultă că: $\cos\left(2018\cdot arctg\, n\right)=\dfrac{a_{2018}}{\left(n^2+1\right)^{1009}}\in\mathbb{Q}$

$z^{2019}=\left(\sqrt{n^2+1}\right)^{2019}\cdot\left(\cos\left(2019\cdot arctg\, n\right)+i\cdot\sin\left(2019\cdot arctg\, n\right)\right)$

$z^{2019}=\left(1+i\cdot n\right)^{2019}=a_{2019}+i\cdot b_{2019}$, $a_{2019}\in\mathbb{Z}$ **şi** $b_{2019}\in\mathbb{Z}$.

$\sin\left(2019\cdot arctg\, n\right)=\dfrac{a_{2019}}{\left(n^2+1\right)^{1009}\cdot\sqrt{n^2+1}}$

Demonstrăm că $\sqrt{n^2+1}\notin\mathbb{Q},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Presupunem că $\sqrt{n^2+1}=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}^*$ şi $(p,q)=1 \Rightarrow n^2+1=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow q^2\cdot\left(n^2+1\right)=p^2$

$\Rightarrow q^2/p^2$ fals sau $q^2=1$.

$q^2=1 \Rightarrow q=1 \Rightarrow n^2+1=p^2 \Rightarrow (p-n)\cdot(p+n)=1 \Rightarrow n=0$ fals

b) Fie (a,b) o pereche de numere reale pentru care

$$a\cdot(\cos x-1)+b^2=\cos\left(a\cdot x+b^2\right)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Pentru $x=\pi$ şi $x=2\cdot\pi$ numerele *a* şi *b* satisfac egalităţile:

$$-2\cdot a+b^2=\cos\left(\pi\cdot a+b^2\right)-1 \quad (1)$$

$$b^2=\cos\left(2\cdot\pi\cdot a+b^2\right)-1 \Rightarrow b^2\le 0 \Rightarrow b=0 \text{ şi } \cos 2\cdot\pi\cdot a=1\Rightarrow a\in\mathbb{Z}$$

Egalitatea (1) devine $1-2\cdot a=\cos\pi\cdot a$. Cum $-1\le\cos\pi\cdot a\le 1 \Rightarrow -1\le 1-2\cdot a\le 1 \Rightarrow a=0$ sau $a=1$.
Perechile sunt: $(0,0)$ şi $(1,0)$.

Problema 2.
Soluţie. a)
Cazul I

$a_0>b_0$

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{4\cdot a_n+3\cdot b_n}{7}-\frac{4\cdot a_n+5\cdot b_n}{9}=\frac{36\cdot a_n+27\cdot b_n-28\cdot a_n-35\cdot b_n}{63}=\frac{8\cdot a_n-8\cdot b_n}{63}=\frac{8}{63}\left(a_n-b_n\right)$$

Folosind metoda inducţiei matematice se demonstrează că $a_n > b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rezultă că: $a_{n+1} = \dfrac{4\cdot a_n + 3\cdot b_n}{7} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \frac{4\cdot a_n + 5\cdot b_n}{9} > b_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Prin urmare: $b_0 < b_1 < ... < b_n < a_n < a_{n-1} < ... < a_1 < a_0$

Şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton şi mărginit $\Rightarrow$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Cazul al II-lea

$a_0 < b_0$

Se procedează ca în cazul I

Cazul al III-lea

$a_0 = b_0 = \alpha$

Rezultă

$a_n = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $b_n = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

b) Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = a_n - b_n$.

$$x_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{8}{63}\cdot x_n$$

Rezultă $x_n = \left(\dfrac{8}{63}\right)^n \cdot x_0$.

$$a_n - b_n = \left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot x_0 \Rightarrow a_n = b_n + \left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot x_0 \Rightarrow b_{n+1} = \frac{4\cdot b_n + 4\cdot\left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot x_0 + 5\cdot b_n}{9}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot x_0 \quad \Rightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot x_0$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{63}\right)^{n-1} \cdot x_0$$

$$b_{n-1} - b_{n-2} = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{63}\right)^{n-2} \cdot x_0$$

....

$$b_2 - b_1 = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{63}\right)^{1} \cdot x_0$$

$$b_1 - b_0 = \frac{4}{9}\cdot x_0$$

Rezultă $\quad b_n = b_0 + \dfrac{4}{9}\cdot x_0 \cdot\left[1 + \dfrac{8}{63} + \left(\dfrac{8}{63}\right)^2 + ...\left(\dfrac{8}{63}\right)^{n-1}\right]$

$$b_n = b_0 + \frac{4}{9}\cdot(a_0 - b_0)\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{63}\right)^n}{1-\frac{8}{63}}$$

$$b_n = b_0 + \frac{28}{55}\cdot(a_0 - b_0)\cdot\left[1-\left(\frac{8}{63}\right)^n\right]$$

$$a_n = b_n + \left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot (a_0 - b_0) \;\; \Rightarrow a_n = b_0 + \frac{28}{55} \cdot (a_0 - b_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{8}{63}\right)^n\right] + \left(\frac{8}{63}\right)^n \cdot (a_0 - b_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b_0 + \frac{28}{55} \cdot (a_0 - b_0) = \frac{28 \cdot a_0 + 27 \cdot b_0}{55}$$

Problema 3.

Soluţie. a) Fie $\frac{a}{r}$ raţional.

Putem considera a şi r de acelaşi semn. Atunci $\frac{a}{r} = \frac{p}{q}$ cu $p,\ q$ naturale. Deoarece $q / (1+q)^m - 1$ pentru orice m natural, rezultă că numărul $q_m = \frac{a \cdot (1+q)^m - a}{r} = \frac{p \cdot \left[(1+q)^m - 1\right]}{q}$ este natural.

Fiecare termen al progresiei geometrice $a \cdot (1+q)^m,\ m \in \{0,1,2,3,...\}$ are forma $a \cdot (1+q)^m = a + q_m \cdot r$ deci aparţine progresiei aritmetice.

Reciproc, fie progresia aritmetică $a,\ a+r,\ a+2\cdot r, ..., a+n\cdot r, ...\ r \neq 0$, care conţine o progresie geometrică.
Fie trei termeni ai ei $a+k\cdot r,\ a+l\cdot r,\ a+m\cdot r,\ \ k<l<m$ care să formeze trei termeni consecutivi ai progresiei geometrice.
Atunci $(a+l\cdot r)^2 = (a+k\cdot r)(a+m\cdot r) \Rightarrow a\cdot(2\cdot l - k - m) = r\cdot(k\cdot m - l^2)$.
Presupunem că $2\cdot l - k - m = 0 \Rightarrow k\cdot m - l^2 = 0 \Rightarrow (k-m)^2 = (k+m)^2 - 4\cdot k\cdot m = 4\cdot l^2 - 4\cdot l^2 = 0$
Prin urmare $k = m$ ceea ce este fals.
Rezultă $2\cdot l - k - m \neq 0$.
Cum $\frac{a}{r} = \frac{k\cdot m - l^2}{2\cdot l - k - m}$, rezultă că $\frac{a}{r}$ este număr raţional.

b) Presupunem prin reducere la absurd că există o progresie geometrică infinită

$∺\ a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2, ...$ cu $a>0,\ q>0,\ q\neq 1$ din care se poate extrage progresia aritmetică infinită

$\div\ \ a\cdot q^{k_1},\ a\cdot q^{k_2}, ...,\ a\cdot q^{k_n},\ a\cdot q^{k_{n+1}}, ...$. Renotăm progresia aritmetică astfel $\div a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...$.

Avem că: $a_1 + a_{n+1} = a_2 + a_n\ ,\ \forall n$ (1)

Dacă $q<1$, pentru $n\to\infty$ din $q^n \to 0$ rezultă $a_n \to 0$. Din (1) rezultă $a_1 = a_2 \Rightarrow q = 1$, contradicţie.

Dacă $q>1$,cum $k_{n+1} \geq k_n + 1$ rezultă

$q^{k_{n+1}} \geq q^{k_n}\cdot q \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \cdot q \Rightarrow a_2 + a_n = a_1 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n\cdot q \Rightarrow \frac{a_2}{a_n} + 1 \geq \frac{a_1}{a_n} + q$.

Pentru $n\to\infty,\ a_n \to \infty$ rezultă $q \leq 1$ contradicţie.