**Inspectoratul Școlar al Județului Galați**

**Societatea de Științe Matematice din România** **Filiala Galați**

**Colegiul Național „Vasile Alecsandri”** **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

**Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediția a XX-a**
**Galați, 02 noiembrie 2019**

***Clasa a VII-a***

***SOLUȚII***

**Problema 1.**

**Soluție. a)** Avem că $\frac{2\cdot a+3\cdot b}{4\cdot a+5\cdot b+6\cdot c}=\frac{2\cdot b+3\cdot c}{4\cdot b+5\cdot c+6\cdot a}=\frac{2\cdot c+3\cdot a}{4\cdot c+5\cdot a+6\cdot b}=\frac{5\cdot a+5\cdot b+5\cdot c}{15\cdot a+15\cdot b+15\cdot c}=\frac{1}{3}$

$\sqrt{\frac{a+3\cdot b}{3\cdot a+4\cdot b+5\cdot c}+\frac{b+3\cdot c}{3\cdot b+4\cdot c+5\cdot a}+\frac{c+3\cdot a}{3\cdot c+4\cdot a+5\cdot b}}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1\in\mathbb{N}$.

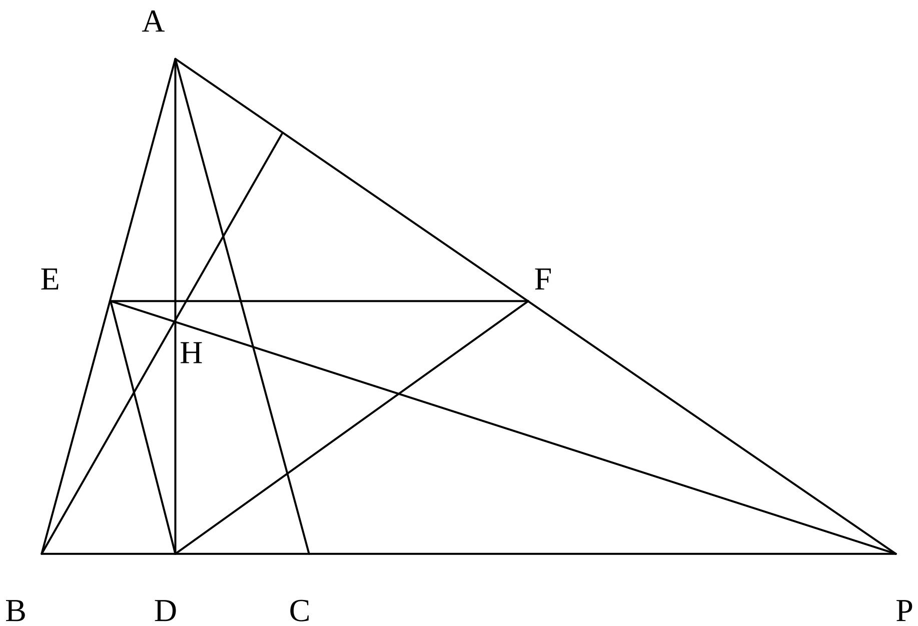
**b)** Din $\frac{2\cdot a+3\cdot b}{4\cdot a+5\cdot b+6\cdot c}=\frac{1}{3}\Rightarrow 6\cdot a+9\cdot b=4\cdot a+5\cdot b+6\cdot c\Rightarrow a+2\cdot b=3\cdot c$ și analoagele:
$b+2\cdot c=3\cdot a$, $c+2\cdot a=3\cdot b$. Găsim că $a=b=c$

Înlocuind în relația inițială obținem: $\sqrt{\frac{\sqrt{5\cdot a\cdot a}}{4\cdot a+5\cdot a+6\cdot a}\cdot 3}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\sqrt{5}\cdot a}{15\cdot a}\cdot 3}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

Prin ridicare la pătrat de două ori obținem $\frac{5}{25}\le\frac{4}{16}\Leftrightarrow\frac{1}{5}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\le 5$. Astfel inegalitatea este demonstrată.

**Problema 2.**

**Soluție.**




**a)** În triunghiul *ABP* avem: *PE* este mediatoarea segmentului $[AB]\Rightarrow PE\perp BA$ (1)

D mijlocul lui $[BC]\Rightarrow AD\perp BC$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că *H* este ortocentrul triunghiului *ABP*, deci $BH\perp AP$.

**b)** $ED\parallel AC\Rightarrow\sphericalangle BED=\sphericalangle BAC=30^{\circ}$ (3)

$EF \parallel BC \Rightarrow m(\sphericalangle AEF) = m(\sphericalangle ABC) = 75^\circ$ (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow m(\sphericalangle DEF) = 75^\circ$ (5).

$PE$ este mediatoarea segmentului $[AB] \Rightarrow \triangle PAB$ este isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle APB) = 30^\circ$

$EF \parallel BP \Rightarrow m(\sphericalangle AFE) = m(\sphericalangle APB) = 30^\circ$

DF mediană în triunghiul dreptunghic ADP $\Rightarrow DF = FP \Rightarrow \triangle FDP$ isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle PFD) = 120^\circ$

$\Rightarrow m(\sphericalangle EFD) = 30^\circ$.

În triunghiul EDF $\Rightarrow m(\sphericalangle EDF) = 75^\circ$ (6).

Din (5), (6) $\Rightarrow$ triunghiul $EDF$ este isoscel, iar măsurile unghiurilor triunghiului sunt:

$m(\sphericalangle DEF) = 75^\circ$, $m(\sphericalangle EFD) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle EDF) = 75^\circ$.

**Problema 3.**

**Soluţie. a)** Vom demonstra că cel mai mare număr *m* este $1008$. Mai întâi să arătăm că nici un număr *n* mai mare sau egal cu 1009 nu are proprietatea necesară. Într-adevăr, dacă $m \geq 1009$, atunci eliminând primele *m* numere( de la 1 la m) rămânem cu numerele de la $m+1 \geq 1010$ la 2019 printre care evident că nu este nici unul care să se dividă la altul.

Vom demonstra că $m = 1008$ are proprietatea cerută. Vom demonstra că printre oricare 1011 numere luate de la 1 la 2019 se vor găsi două dintre care unul să se dividă la celălalt.

Vom pune în corespondenţă fiecărui număr dintre cele 1011 cel mai mare divizor al său impar; numărul $2^k(2n+1)$ este pus în corespondenţă cu numărul $2n+1$. Numere impare mai mici sau egale cu 2019 sunt în total 1010. Prin urmare la anumite două numere din cele 1011 le va corespunde unul şi acelaşi număr impar. Dintre aceste două numere cel mai mare se obţine din cel mai mic înmulţit cu un factor putere a lui 2.

**b)** Pentru $k = 0$, avem $a = \sqrt{5} \Rightarrow 2 < a < 3$, deci cei doi întregi sunt 2 şi 3.

Pentru $k = 1 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$, obţinem $1 < a < 2$, deci cei doi întregi sunt 1 şi 2

Pentru $k = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$, obţinem $1 < a < 2$, deci cei doi întregi sunt 1 şi 2

Demonstrăm că pentru orice $k \geq 1$ avem că $1 < a < 2$.

Înlocuind *a* avem de arătat că $1 < \dfrac{k\sqrt{2}+\sqrt{5}}{1+k} < 2$. Cum $k \in \mathbb{N}$ numitorul fiind un număr pozitiv, relaţia va fi echivalentă cu: $1+k < k\sqrt{2}+\sqrt{5} < 2+2k$.

Prima inegalitate este evidentă. A doua devine $\sqrt{5}-2 < 2k-k\sqrt{2} \Leftrightarrow k(2-\sqrt{2}) > \sqrt{5}-2 \Leftrightarrow k > \dfrac{\sqrt{5}-2}{2-\sqrt{2}}$

sau $k > \dfrac{0,236}{0,585} \Leftrightarrow k > 0,4$, cum $k \in \mathbb{N}$ rezultă că $1 < \dfrac{k\sqrt{2}+\sqrt{5}}{1+k} < 2$ pentru orice $k \geq 1$.