Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XX -a

Galaţi, 2 noiembrie 2019

Clasa a VIII –a

SOLUȚII

Problema 1.

a) $x = y - 2,\ x \in [0;3]$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{2(y-2)^2} = |y-2|\sqrt{2} = (y-2)\sqrt{2}$$

$x - 3 = y - 5,\ x - 3 \in [-3;0]$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25}$$

$$= \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{2(y-5)^2} = |y-5|\sqrt{2} = (-y+5)\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34} = (y-2)\sqrt{2} + (-y+5)\sqrt{2}$$

$$= (y - 2 - y + 5)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

b) $A_{10} = \sqrt{940} = 30{,}65\ldots;\ A_{11} = \sqrt{1133} = 33{,}66\ldots;\ A_{12} = \sqrt{1344} = 36{,}66\ldots;$
$A_{13} = \sqrt{1573} = 39{,}66\ldots.$

Trebuie să arătăm că: $0{,}66 \le A_n - [A_n] < 0{,}67, \forall n \ge 11$, unde $[A_n]$ reprezintă partea întreagă a numărului $[A_n]$.

Deoarece $3n \le \sqrt{9n^2 + 4n} < 3n + 1$ rezultă că $[A_n] = 3n$.

$$0{,}66 \le A_n - [A_n] < 0{,}67 \Leftrightarrow$$

$$0{,}66 \le \sqrt{9n^2 + 4n} - 3n < 0{,}67 \Leftrightarrow$$

$$0{,}66 + 3n \le \sqrt{9n^2 + 4n} < 0{,}67 + 3n \Leftrightarrow$$

$$(0{,}66 + 3n)^2 \le 9n^2 + 4n < (0{,}67 + 3n)^2 \Leftrightarrow$$

$$9n^2 + 6n \cdot \frac{66}{100} + \left(\frac{66}{100}\right)^2 \leq 9n^2 + 4n < 9n^2 + 6n \cdot \frac{67}{100} + \left(\frac{67}{100}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$6n \cdot \frac{66}{100} + \left(\frac{66}{100}\right)^2 \leq 4n \cdot \frac{100}{100} < 6n \cdot \frac{67}{100} + \left(\frac{67}{100}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$396n + \frac{66^2}{100} \leq 400n < 402n + \frac{67^2}{100}$$

$$396n + \frac{66^2}{100} \leq 400n \Leftrightarrow \frac{66^2}{100} \leq 4n \Leftrightarrow \frac{4356}{400} \leq n \Leftrightarrow n \geq 10{,}89 \Leftrightarrow n \geq 11$$

$400n < 402n + \frac{67^2}{100} \Leftrightarrow -2n < \frac{4489}{100}$ adevărat $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 10$ primele două zecimale ale lui A_n sunt 65, iar pentru $n \geq 11$ primele două zecimale ale lui A_n sunt 66.

Problema 2.

a) Fie $a, b \in [0; 2]$.

$$\frac{1}{a+b+1} \leq 1 - \frac{a+b}{3} + \frac{2ab}{15} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a+b+1} \leq \frac{15 - 5a - 5b + 2ab}{15} \Leftrightarrow$$

$$15 \leq (15 - 5a - 5b + 2ab)(a + b + 1) \Leftrightarrow$$

$$15 \leq 15a + 15b + 15 - 5a^2 - 5ab - 5a - 5ab - 5b^2 - 5b + 2a^2b + 2ab^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 \leq 10a + 10b - 5a^2 - 8ab - 5b^2 + 2a^2b + 2ab^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 2a^2b - 5a^2 - 4ab + 10a + 2ab^2 - 5b^2 - 4ab + 10b \Leftrightarrow$$

$$0 \leq a^2(2b - 5) - 2a(2b - 5) + b^2(2a - 5) - 2b(2a - 5) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (a^2 - 2a)(2b - 5) + (b^2 - 2b)(2a - 5) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq a(a - 2)(2b - 5) + b(b - 2)(2a - 5).$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece:

$a, b \geq 0$, iar $a - 2 \leq 0$ și $b - 2 \leq 0$

$2a \leq 4 \Leftrightarrow 2a - 5 \leq -1$ și $2b \leq 4 \Leftrightarrow 2b - 5 \leq -1$

$a(a - 2)(2b - 5) \geq 0$ și $b(b - 2)(2a - 5) \geq 0$.

b) Se construieşte punctul H simetricul punctului Z faţă de punctul M .

Deoarece H este simetricul punctului Z faţă de punctul M și M este mijlocul segmentului $[BC]$ avem $ZM = MH, BM = MC$.

Din $ZM = MH, BM = MC, BC \cap ZH = \{M\}$ rezultă că patrulaterul *BHCZ* este paralelogram. Deci $[CZ] \equiv [BH]$.

$CD = 2 \cdot AB, CD = 2 \cdot DN$ deci $AB = DN$

Triunghiul ΔCNZ echilateral, rezultă $NZ = NC = CZ, m(\sphericalangle ZNC) = m(\sphericalangle NCZ) = 60°$.

Deci $m(\sphericalangle DNZ) = 180° - m(\sphericalangle ZNC) = 120°$.

Pe de altă parte, deoarece *BHCZ* este paralelogram avem $m(\sphericalangle HBM) = m(\sphericalangle MCZ) = 60° + m(\sphericalangle MCD)$.

Din faptul că $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ obținem că $m(\sphericalangle ABC) = 180° - m(\sphericalangle MCD)$.

Aplicând proprietatea punctelor situate în jurul punctului B se obține:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle ABH) &= 360° - m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle HBM) \\ &= 360° - \big(180° - m(\sphericalangle MCD)\big) - \big(60° + m(\sphericalangle MCD)\big) \\ &= 360° - 180° + m(\sphericalangle MCD) - 60° - m(\sphericalangle MCD) = 120°. \end{aligned}$$

Deci $\sphericalangle ABH \equiv \sphericalangle DNZ$.

Cum $NZ = NC = CZ$ și $CZ = BH$ avem $ZN = BH$.

Deoarece $ZN = BH, AB = DN, \sphericalangle ABH \equiv \sphericalangle DNZ$ rezultă conform cazului $L.U.L$ că $\Delta ABH \equiv \Delta DNZ$.

Cum N este mijlocul $[DC]$ avem $DN = NC$ și deoarece $NZ = NC$ rezultă ΔDNZ este isoscel de vârf N, iar $m(\sphericalangle NDZ) = \big(180° - m(\sphericalangle DNZ)\big): 2 = 30°$.

Din $\Delta ABH \equiv \Delta DNZ$ avem $DZ = AH$ și $, \sphericalangle BAH \equiv \sphericalangle NDZ$. Deci $m(\sphericalangle NDZ) = m(\sphericalangle BAH) = 30°$.

Triunghiul ΔAED echilateral, rezultă $ED = EA = AD, m(\sphericalangle EDA) = m(\sphericalangle EAD) = 60°$.

Astfel vom avea $m(\sphericalangle EDZ) = 90° + m(\sphericalangle ADC)$.

Pe de altă parte, din faptul că $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ obținem că $m(\sphericalangle DAB) = 180° - m(\sphericalangle ADC)$.

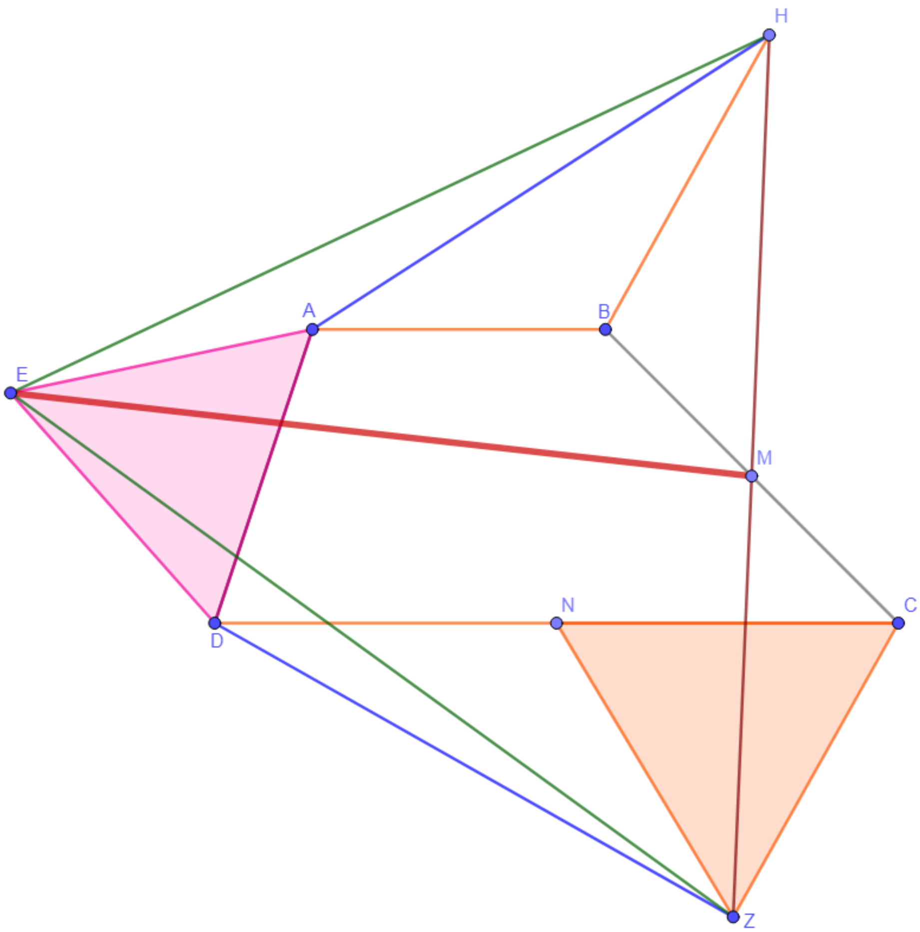
Aplicând proprietatea punctelor situate în jurul punctului A se obține:

$$m(\sphericalangle EAH) = 360° - m(\sphericalangle EAD) - m(\sphericalangle DAB) - m(\sphericalangle HAB)$$
$$= 360° - 60° - \left(180° - m(\sphericalangle ADC)\right) - 30°$$
$$= 360° - 60° - 180° + m(\sphericalangle ADC) - 30° = 90° + m(\sphericalangle ADC).$$

Deci $\sphericalangle EDZ \equiv \sphericalangle EAH$.

Deoarece $EA = ED, AH = DZ, \sphericalangle EDZ \equiv \sphericalangle EAH$ rezultă conform cazului $L.U.L$ că $\Delta EAH \equiv \Delta EDZ$.

Din faptul că $\Delta EAH \equiv \Delta EDZ$ se obține că $EH = EZ$ și cum $[EM]$ mediană din construcție, obținem că EM este și înățime. Deci $EM \perp HZ$ iar $m(\sphericalangle EMZ) = 90°$.



Problema 3.

Presupunem prin reducere la absurd că există $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât pentru orice $k \in (1, n]$ există $j \in [0, k)$ astfel încât:

$$\frac{a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_k}{k - j} > \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

În particular pentru $k = n$, există n_1 astfel încât $\frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n_1+1}}{n - n_1} > A$.

Pentru $k = n_1$, există n_2 astfel încât $\frac{a_{n_1} + a_{n_1-1} + \cdots + a_{n_2+1}}{n_1 - n_2} > A$.

Dacă $n_2 > 0$, atunci pentru $k = n_2$, există n_3 astfel încât $\frac{a_{n_2} + a_{n_2-1} + \cdots + a_{n_3+1}}{n_2 - n_3} > A$.

….

Pentru $k = n_{r-1}$, există n_r astfel încât $\frac{a_{n_{r-1}} + a_{n_{r-1}-1} + \cdots + a_{n_r+1}}{n_{r-1} - n_r} > A$.

Pentru $k = n_r$, $\frac{a_{n_r} + a_{n_r-1} + \cdots + a_1}{n_r} > A$.

Prin însumarea celor de mai sus se obține:

$$\begin{aligned}&\left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n_1+1}\right) + \left(a_{n_1} + a_{n_1-1} + \cdots + a_{n_2+1}\right) + (a_{n_2} + a_{n_2-1} + \cdots + a_{n_3+1}) + \cdots \\ &\quad + \left(a_{n_{r-1}} + a_{n_{r-1}-1} + \cdots + a_{n_r+1}\right) + \left(a_{n_r} + a_{n_r-1} + \cdots + a_1\right) \\ &\quad > A \cdot (n - n_1) + A \cdot (n_1 - n_2) + A \cdot (n_2 - n_3) + \cdots + A \cdot (n_{r-1} - n_r) + A \cdot n_r \\ &\quad \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n > A \cdot n \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > A\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow A > A$ fals. Deci presupunerea făcută este falsă, astfel există un număr natural $k \leq n$, astfel încât fiecare dintre cele k numere

$$a_k, \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \frac{a_{k-2} + a_{k-1} + a_k}{3}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

este cel mult egal cu $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.