Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a IX-a

Problema 1.

a) Câte soluţii numere naturale are ecuaţia: $\left[\left[\sqrt{x}\right]+\sqrt{x}\right]=10$? $\left(\textit{justificare}\right)$

$\big($s-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a$\big)$

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că mulţimea A$=\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x|+|x-2019|+|x+2019|=m+8\right\}$ are un singur element.

Problema 2.

În patrulaterul convex ABCD, fie punctele M, N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$, punctul G mijlocul segmentului $[MN]$, iar G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD, ABC.

a) Dacă O este un punct din planul patrulaterului, să se demonstreze că

$$4 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

b) Să se demonstreze că dreptele AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 sunt concurente.

Problema 3.

Să se determine tripletele (x, y, z) de numere întregi, diferite două câte două, care verifică egalitatea:

$$\frac{x^2}{(x-y)\cdot(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)\cdot(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)\cdot(z-y)}=x^2+y^2+z^2-61.$$

Problema 4.

a) Să se demonstreze $\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{2},\ (\forall)x \in \mathbb{R}_+^*$

b) Fie numerele reale strict pozitive $x,\ y,\ z,\ t$ cu proprietatea $x \cdot y = z \cdot t = 1$.

Arătaţi că: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \leq \sqrt{2\cdot(x+y+z+t)}.$

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7