Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a)1019:50=20, rest 19 $\Rightarrow$ Valentin stă pe rândul 21, locul 19. Dacă rândul 21 este rândul din mijloc, atunci pe stadion sunt $2\cdot 20+1=41$ rânduri. Numărul locurilor este $41\cdot 50=2050$ locuri. b)Valentina stă pe rândul 41, pe locul 19. Aşadar,Valentina ocupă locul $40\cdot 50+19=2019$.	**2p** **2p** **2p** **1p**
2	Divizorii numărului 2^n sunt $1, 2, 2^2, 2^3,...,2^{n-1}, 2^n$. Divizorii improprii ai numărului 2^n sunt: $1, 2^n \Rightarrow S_i=1+2^n$; Divizorii proprii ai numărului 2^n sunt: $2, 2^2, 2^3,...,2^{n-1} \Rightarrow$ $S_p=2+2^2+2^3+...+2^{n-1};(1)$ Înmulţim ultima egalitate cu $2 \Rightarrow 2\cdot S_p=2^2+2^3+...+2^{n-1}+2^n;(2)$ Scăzând relaţiile $(2),(1)\Rightarrow S_p=2^n-2$; a) Dacă $3/S_i \Rightarrow S_i=3\cdot m,$ m număr natural, $m\geq 1\Rightarrow$ $1+2^n=3\cdot m \Rightarrow 2^n=3\cdot m-1\Rightarrow$ $2^n=3\cdot m+3-3-1=3\cdot m-3+3-1=3\cdot(m-1)+2;$ Atunci $S_p=2^n-2=3\cdot(m-1)+2-2=3\cdot(m-1)\Rightarrow 3/S_p$. b) Dacă $3/S_p \Rightarrow S_p=3\cdot k,$ k număr natural, $k\geq 2\Rightarrow$ $2^n-2=3\cdot k \Rightarrow 2^n=3\cdot k+2\Rightarrow$ Atunci $S_i=1+2^n=1+3\cdot k+2=3\cdot k+3=3\cdot(k+1)\Rightarrow 3/S_i$.	**1p** **1p** 1p 2p 2p

3.	Metoda 1. $a=9\cdot\left(\underbrace{111...11}_{2018\text{ cifre}}\underbrace{222...22}_{2019\text{cifre}}5\right)=9\cdot\left(\underbrace{111...11}_{2018\text{ cifre}}\cdot10^{2020}+2\cdot\underbrace{111...11}_{2019\text{ cifre}}\cdot10+5\right)$ $a=\underbrace{999...99}_{2018\text{ cifre}}\cdot10^{2020}+2\cdot\underbrace{999...99}_{2019\text{ cifre}}\cdot10+45\Rightarrow$ $a=10^{2020}\cdot\left(10^{2018}-1\right)+20\cdot\left(10^{2019}-1\right)+45\Rightarrow$ $a=10^{4038}-10^{2020}+2\cdot10^{2020}-20+45\Rightarrow$ $a=10^{4038}+10^{2020}+25\Rightarrow$ $a=10^{4038}+10\cdot10^{2019}+25\Rightarrow$ $a=10^{4038}+5\cdot10^{2019}+5\cdot10^{2019}+25\Rightarrow$ $a=10^{2019}\cdot\left(10^{2019}+5\right)+5\cdot\left(10^{2019}+5\right)\Rightarrow$ $a=\left(10^{2019}+5\right)\cdot\left(10^{2019}+5\right)\Rightarrow$ $a=\left(10^{2019}+5\right)^2\Rightarrow a=\left(10^{2019}+5\right)^2=\left(1\underbrace{000...00}_{2018\text{ cifre}}5\right)^2$.	2p 2p 2p 1p
	Metoda 2. $a=9\cdot\left(\underbrace{111...11}_{2018\text{ cifre}}\underbrace{222...22}_{2019\text{cifre}}5\right)\Rightarrow a=\underbrace{100...01}_{2019\text{ cifre}}\underbrace{000...02}_{2019\text{cifre}}5\Rightarrow$ $a=10^{4038}+10^{2020}+25\Rightarrow$ $a=10^{4038}+5\cdot10^{2019}+5\cdot10^{2019}+25\Rightarrow a=10^{2019}\cdot\left(10^{2019}+5\right)+5\cdot\left(10^{2019}+5\right)\Rightarrow$ $a=\left(10^{2019}+5\right)\cdot\left(10^{2019}+5\right)\Rightarrow$ $a=\left(10^{2019}+5\right)^2\Rightarrow a=\left(1\underbrace{000...00}_{2018\text{ cifre}}5\right)^2$.	

4.

1. Dacă x este număr natural, $x \neq 0 \Rightarrow x^0 = 1$.

Dacă $n = 0 \Rightarrow a = 5$ care 5 nu se divide cu $2 \Rightarrow n = 0$ nu convine; **1p**

Dacă $n \neq 0 \Rightarrow$ numărul a conţine 5 termeni numere pare $\Rightarrow a$ este număr par

$a \vdots 2$ pentru orice n număr natural nenul; **1p**

Numărul b conţine 5 termeni numere impare $\Rightarrow b$ este număr impar $\Rightarrow b$ nu s

n nu are nicio valoare. **1p**

2. $a \vdots 10 \Leftrightarrow u(a) = 0$

Calculăm ultima cifră a numărului a, notată $u(a)$:

	$n = 4k,\ k \neq 0$, k nr. natural ne	$n = 4k+1$, k nr. natural	$n = 4k+2$, k nr. natural	$n = 4k+3$, k nr. natural
$u(2020^n)$	0	0	0	0
$u(2022^n)$	6	2	4	8
$u(2024^n)$	6	4	6	4
$u(2026^n)$	6	6	6	6
$u(2028^n)$	6	8	4	2
$u(a)$	4	0	0	0

2p

Pentru $n=0 \Rightarrow u(a)=5 \Rightarrow a$ nu se divide cu 10.

Aşadar, a nu se divide cu 10 pentru n multiplu de 4.

Dar $2000 \leq n \leq 2019 \Rightarrow n$ ia 5 valori astfel încât a nu se divide cu 10.

Calculăm ultima cifră a numărului b, notată $u(b)$

	$n = 4k$, $k \neq 0$, k nr. natural nen	$n = 4k+1$, k nr. natural	$n = 4k+2$, k nr. natura	$n = 4k+3$, k nr. natura
$u(2021^n)$	1	1	1	1
$u(2023^n)$	1	3	9	7
$u(2025^n)$	5	5	5	5
$u(2027^n)$	1	7	9	3
$u(2029^n)$	1	9	1	9
$u(b)$	9	5	5	5

1p

Aşadar, b nu se divide cu 5 pentru n multiplu de 4, $n \neq 0$.

Dar $2000 \leq n \leq 2019 \Rightarrow n$ ia 5 valori astfel încât b nu se divide cu 5. 1p

Aşadar, pentru numerele 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, numărul

a nu se divide cu 10, iar b nu se divide cu 5.