Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Soluţie: $a)\ I_{n+2}+I_{n+1}+a\cdot I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^{n+1}+a\cdot x^n}{x^2+x+a}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}.$	2p
	$b) I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{x^n\cdot(x-1)}{x^2+x+a}dx\le 0,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow (I_n)_{n\ge1}$ este şir descrescător $\Rightarrow$ $I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$	1p
	Aşadar, $\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+I_{n+1}+a\cdot I_n\le I_n+I_n+a\cdot I_n=(2+a)\cdot I_n\Rightarrow$ $I_n\ge\frac{1}{(a+2)\cdot(n+1)},(\forall)n\in\mathbb{N}^*;$ $\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+I_{n+1}+a\cdot I_n\ge I_{n+2}+I_{n+2}+a\cdot I_{n+2}=(2+a)\cdot I_{n+2}\Rightarrow$ $I_{n+2}\le\frac{1}{(a+2)\cdot(n+1)},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ $\overset{\text{pentru } n\to n-2}{\Longrightarrow}\quad I_n\le\frac{1}{(a+2)\cdot(n-1)},(\forall)n\in\mathbb{N}^*;$ Deci, $\frac{1}{(a+2)\cdot(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{(a+2)\cdot(n-1)},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge2.$	2p
	$c)$ Din $\frac{1}{(a+2)\cdot(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{(a+2)\cdot(n-1)},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge2\Rightarrow$	1p
	$\frac{n}{(a+2)\cdot(n+1)}\le n\cdot I_n\le\frac{n}{(a+2)\cdot(n-1)},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge2\overset{T.\ cleştelui}{\Longrightarrow}$ $\lim_{n\to\infty}(n\cdot I_n)=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{2019}\Rightarrow a=2017.$	1p

2.	Soluţie:	
	a) $\Leftarrow$ Dacă H $\subset$ K atunci H $\cup$ K=K este subgrup.	1p
	Dacă K $\subset$ H, atunci H $\cup$ K=H este subgrup.	1p
	b) $\Rightarrow$ Fie H $\cup$ K subgrup al lui G, unde H, K sunt subgrupuri ale lui G.	
	Presupunem prin metoda reducerii la absurd că H $\not\subset$ K şi K $\not\subset H$.Atunci există	
	şi există y $\in$ K, y $\notin$ H.	
	Cum $x, y \in H \cup K \Rightarrow x \cdot y \in H \cup K \Rightarrow x \cdot y \in H$ sau $x \cdot y \in K$.	1p
	$\left.\begin{array}{l}\text{Dacă } x \cdot y \in H \\ \text{cum } x \in H, \\ \text{H subgrup}\end{array}\right\} \Rightarrow x^{-1} \in H.$	
	$\left.\begin{array}{l}x^{-1} \in H \\ x \cdot y \in H\end{array}\right\} \Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = y \in H - contradic\c{t}ie;$	1p
	$\left.\begin{array}{l}\text{Dacă } x \cdot y \in K \\ \text{cum y} \in K, \\ \text{K subgrup}\end{array}\right\} \Rightarrow y^{-1} \in K.$	2p
	$\left.\begin{array}{l}y^{-1} \in K \\ x \cdot y \in K\end{array}\right\} \Rightarrow (x \cdot y) y^{-1} = x \in K - contradic\c{t}ie.$	1p
	Aşadar şi afirmaţia directă este adevărată.	

3.	a) $\left.\begin{array}{l}\text{Din card G=2024}\\ x\in G\end{array}\right\}\Rightarrow x^{2024}=e;$	**1p**
	$a\in G,\ a^{11}=e;$ Din $x^{2019}=a\Rightarrow x^{2019\cdot 11}=a^{11}=e;$ Dar $2019\cdot 11=(2024-5)\cdot 11=2024\cdot 11-55=2024\cdot 10+2024-55=$ $2024\cdot 10+1969;$ Obţinem $x^{2019\cdot 11}=x^{2024\cdot 10+1969}=e\Rightarrow x^{1969}=e/\cdot x^{55}\Rightarrow x^{55}=e;$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l}\text{Fie } n\in\mathbb{N}^*, ord(x)=n\\ x^{55}=e\end{array}\right\}\Rightarrow n/55;$ $\left.\begin{array}{l}n/55\\ n/2024\end{array}\right\}\Rightarrow n/(55,2024)\Rightarrow n/11\Rightarrow n\in\{1;11\};$ Dacă $n=1\Rightarrow x=e,$ deci ecuaţia ar deveni a=e- contradicţie pentru că $\text{ord}(a)=11;$	**2p**
	Dacă $n=11\Rightarrow x^{11}=e;$	**2p**
	Din $x^{2019}=a,$ iar $2019=11\cdot 183+6\Rightarrow x^{6}=a\Rightarrow x^{12}=a^{2}\Rightarrow$ $x^{11}\cdot x=a^{2}\Rightarrow x=a^{2}.$ Verificare: $a^{2019\cdot 2}=a^{4038}=a^{4037}\cdot a=\left(a^{11}\right)^{367}\cdot a=a.$	**1p**

4.	$a)$ Se consideră funcţia $g:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}$, cu derivata $g'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1}$; Dar $x\in[0,\infty)\Rightarrow g'(x)\geq 0,(\forall)x\in[0,\infty)\Rightarrow$ funcţia g este strict crescătoare pe $g(x)\geq g(0)=0,(\forall)x\in[0,\infty)$.	2p
	$b)$ Conform punctului a) $\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\geq\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{f^2\left(\frac{k}{n}\right)}{2\cdot n^2}$, $(\forall)k\in\{1,2,3,...,n\}\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f^2\left(\frac{k}{n}\right)=a_n-\frac{1}{2n}b_n$, unde $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right),\ b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f^2\left(\frac{k}{n}\right)$;	2p
	Din f funcţie continuă $\Rightarrow f, f^2$ sunt funcţii integrabile pe $[0,1]\Rightarrow$ $a_n\to\int_0^1 f(x)dx$, iar $b_n\to\int_0^1 f^2(x)\,dx$, deci $a_n-\frac{1}{2n}b_n\to\int_0^1 f(x)\,dx$; Deci $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\geq\int_0^1 f(x)dx \qquad (1)$	2p
	Din $\ln(x+1)\leq x,\ (\forall)x\in[0,\infty)\Rightarrow\ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leq\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$, $(\forall)k\in\{1,2,3,...,n\}$, deci $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)=a_n\to\int_0^1 f(x)dx \qquad (2)$ Din (1) şi $(2)\overset{T.cleștelui}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx.$	1p