Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1	a) Se descompun numerele a, b, c în factori primi şi obţinem : $a=2^4\cdot 3^2\cdot 17$ $b=2^6\cdot 3\cdot 7^2$ $c=2^5\cdot 3^3\cdot 11$	2p
	Cel mai mare divizor al numerelor a, b, c este d$=2^4\cdot 3=48$.	1p
	$b)$ $2465 : x = m,$ rest 17, $x>17$ 9420: $x = n$, rest 12, $x>12$ 9525: $x = p,$ rest 21, $x>21,$ unde $m, n, p\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{N}^*$	2p
	Atunci $\begin{cases}2465=x\cdot m+17\\9420=x\cdot n+12\\9525=x\cdot p+21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2448=x\cdot m\\9408=x\cdot n\\9504=x\cdot p\end{cases}\Rightarrow x$ este divizor comun al nume 2448, 9408 şi $9504\Rightarrow$ x divide cel mai mare divizor comun al acestor numere, adică $x\mid 48$.	1p
	Dar $x>21\Rightarrow x=24$ sau x=48.	1p
2	a) $\mathrm{m}(\sphericalangle COB)=m(\sphericalangle DOE)=90^\circ\Rightarrow m(COD)+m(EOB)=180^\circ$ $[OP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle$COD şi $[OF$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle$EOB, atunci:	1p
	$\mathrm{m}(\sphericalangle POF)=m(\sphericalangle POD)+m(\sphericalangle DOE)+m(\sphericalangle EOF)=\frac{m(\sphericalangle COD)}{2}+90^\circ+\frac{m(\sphericalangle EOB)}{2}=$ $=\frac{m(\sphericalangle COD)+m(\sphericalangle EOB)}{2}+90^\circ=90^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow$ semidreptele $[OP,[OF$ sunt semidrepte opuse.	2p

	b) Metoda1.Notăm $m(\measuredangle AOB)=a$ şi $m(\measuredangle AOE)=b$; $m(\measuredangle BOM)=m(\measuredangle AOM)-m(\measuredangle \text{AOB})=\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle AOC)-m(\measuredangle \text{AOB})=\frac{1}{2}(a+90^\circ)-a=45^\circ-\frac{a}{2}$; $m(\measuredangle AON)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOD)=\frac{1}{2}(360^\circ-90^\circ-b)=135^\circ-\frac{b}{2}$; $m(\measuredangle \text{BOM})+\text{m}(\measuredangle \text{AON})-\frac{m(\measuredangle COD)}{2}=45^\circ-\frac{a}{2}+135^\circ-\frac{b}{2}-90^\circ+\frac{a+b}{2}=90^\circ$. Metoda 2. $[\text{OM}$ este bisectoarea $m(\measuredangle AOC)\Rightarrow m(\measuredangle AOM)=m(\measuredangle MOC)$; $m(\measuredangle BOC)=90^\circ\Rightarrow m(\measuredangle BOM)=90^\circ-m(\measuredangle AOM)\Rightarrow m(\measuredangle BOM)=90^\circ-\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle AOC)$ $[\text{ON}$ este bisectoarea $m(\measuredangle AOD)\Rightarrow m(\measuredangle \text{AON})=\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle AOD)$ $m(\measuredangle BOM)+m(\measuredangle \text{AON})=90^\circ-\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle AOC)+\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle AOD)=90^\circ+\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle COD)\Rightarrow$ $m(\measuredangle BOM)+m(\measuredangle \text{AON})-\frac{1}{2}\cdot m(\measuredangle COD)=90^\circ$.	1p 1p 2p
3	Notăm cu $d=(a,b)\Rightarrow a=d\cdot x,\ b=d\cdot \text{y},\ (x,y)=1,\ x,\ y\in\mathbb{N}^*$, iar $[a,b]=x\cdot y\cdot d$; *a*) Relaţia din enunţ devine: $d^2\cdot x+d^2\cdot y^2\cdot x=2018\Rightarrow$ $d^2\cdot x\cdot(1+y^2)=2018,\ 2018=2\cdot 1009$, 1009 este număr prim $\Rightarrow d=1$. Relaţia devine $x\cdot(1+y^2)=2018\Rightarrow$ $x\in\{1,2,1009,2018\}$. Convine x =1009 $\Rightarrow$ y=1, de unde a=1009, b=1. b) Presupunem că există $a,b\in\mathbb{N}^*$ care verifică relaţia din enunţ. Atunci $d^2\cdot x\cdot(1+y^2)=2019$; $2019=3\cdot 673$, unde 673 este număr prim $\Rightarrow d=1$. Relaţia devine $x\cdot(1+y^2)=3\cdot 673\Rightarrow x\in\{1,3,673,2019\}$, dar niciunul nu convine.	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p

4	Metoda 1. Sunt mai multe cazuri: 1. Unul din numerele a,b,c este par, iar celelalte impare. Fie a număr par. Trebuie ca $4 \mid a+2 \Rightarrow a \in \{2,6\}, b,c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 2\cdot5\cdot5=50$ numere pentru a par, iar b,c impare. În totoal $3\cdot50$= 150 numere. 2. Două numere sunt pare , iar unul impar. Fie a,b numere pare, iar c impar. $a,b \in \{0,2,4,6,8\}$, $c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5\cdot5\cdot5=125$ numere. Total $3\cdot125$=375 numere. 3.Toate numerele sunt pare $\Rightarrow 5\cdot5\cdot5=125$ numere Rezultat: 150+375+125=650 numere. Metoda 2. Observăm că în total există 1000 de numere de forma $2^a\cdot3^b\cdot5^c$. Determinăm numerele a,b,c astfel încât numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$ nu se divide cu 4; Cazul I. Numerele a, b, c sunt impare $\Rightarrow a,b,c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5\cdot5\cdot5=125$ numere; Cazul II.Unul din numerele a,b,c este par, iar celelalte impare, astfel încât numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$ nu se divide cu 4; Fie a număr par, astfel încât 4 nu divide numărul a+2 $\Rightarrow a \in \{0,4,8\}$, $b,c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow$ $3\cdot5\cdot5=75$ numere; În acest caz sunt $3\cdot75$=225 numere. Aşadar, în total 125+225=350 numere	2p 2p 2p 1p