Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a X-a

Problema 1.

a) Să se determine numerele reale x, y ştiind că $3^x + 3^y = 30$ şi $\log_3 x - \log_3 y = 1$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{1-x^2} = 3 \cdot x - 4 \cdot x^3$.

Problema 2.

Să se demonstreze că pentru orice $a_1, a_2, b_1, b_2 \in (1, \infty)$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_1}\sqrt{b_1}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_2}\sqrt{b_2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_1} a_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_2} a_2^2}} \le 2 \cdot \sqrt{2}\ .$$

Problema 3.

Fie $p, q \in \mathbb{C}, q \ne 0$. Dacă ecuaţia $x^2 + p \cdot x + q = 0$ are ambele soluţii de acelaşi modul, să se demonstreze că $\frac{p^2}{q} \in \mathbb{R}$ şi că $\frac{p^2}{q} \in [0, 4]$.

Problema 4.

a) Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea $f(x) \cdot f(i \cdot x) = x^2, (\forall) x \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze că $f(x) + f(-x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{C}$.

b)

i) Să se arate că, pentru fiecare $m > 0$, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} m \cdot x, & x < 0 \\ 0, & x \ge 0 \end{cases}$ satisface condiţia:

$$f(x \cdot y) \le x \cdot f(y) + y \cdot f(x), \ (\forall) x, y \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

ii) Să se arate că orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia $(*)$ are proprietăţile:

1) f nu este injectivă

2) $f(x) + f(-x) \le 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7