Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie-2019

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Puncta**
1.	a) $\left.\begin{array}{l}\left[\left[\sqrt{x}\right]+\sqrt{x}\right]=10\\ \left[\sqrt{x}\right]\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow \left[\sqrt{x}\right]+\left[\sqrt{x}\right]=10\Rightarrow \left[\sqrt{x}\right]=5\Rightarrow\sqrt{x}\in\left[5;6\right)$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l}x\in\left[25;36\right)\\ x\in\mathbb{N}\end{array}\right\}\Rightarrow x\in\{25,26,..,35\}\Rightarrow$ 11 soluţii naturale.	**1p**
	b) Observăm că dacă $x\in\mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei date, atunci şi $-x$ este soluţie. Pentru a avea soluţie unică este necesar ca $x=-x \Rightarrow x=0$; $x=0$ soluţie $\Rightarrow \left\|-2019\right\|+\left\|2019\right\|=m+8\Rightarrow m=4030$.	**1p**
	Pentru $m=4030$, se obţine: $\left\|x\right\|+\left\|x-2019\right\|+\left\|x+2019\right\|=4038$	**1p**
	Pentru $x\in(-\infty,-2019)\Rightarrow -x-x+2019-x-2019=4038\Rightarrow -3x=4038\Rightarrow$ $x=-\frac{4038}{3}=-1346\notin(-\infty,-2019)$; $x\in\left[-2009,0\right)\Rightarrow -x-x+2019+x+2019=4038\Rightarrow x=0\notin\left[-2009,0\right)$	**1p**
	$x\in\left[0,2019\right)\Rightarrow x-x+2019+x+2019=4038\Rightarrow x=0\in\left[0,2019\right)\Rightarrow$ $x=0$ soluţie $x\in\left[2019,\infty\right)\Rightarrow x+x-2019+x+2019=4038\Rightarrow 3x=4038\Rightarrow$ $x=\frac{4038}{3}=1346\notin\left[2019,\infty\right)$ Aşadar, $x=0$ este soluţie unică pentru $m=4030$.	1p

2.	a) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left[\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\right]=$ $\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OG_1}\right)=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OG_1}\Rightarrow$ $G\in\overrightarrow{AG_1}$; Analog, cuplând alţi 3 vectori din prima paranteză, obţinem $G\in\overrightarrow{BG_2},\ G\in\overrightarrow{CG_3},\ \mathrm{G}\in\overrightarrow{DG_4}\Rightarrow$ dreptele $\mathrm{A}G_1,\mathrm{BG}_2,\mathrm{CG}_3,DG_4$ sunt concurente în punctul G.	**3p** **1p** **1p** **2p**
3.	Soluţie: $\frac{x^2}{(x-y)\cdot(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)\cdot(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)\cdot(z-y)}=$ $\frac{x^2\cdot(y-z)-y^2\cdot(x-z)+z^2\cdot(x-y)}{(x-y)\cdot(x-z)(y-z)}=$ $\frac{x^2\cdot y-x^2\cdot z-y^2\cdot x+y^2\cdot z+z^2\cdot x-z^2\cdot y}{(x-y)\cdot(x-z)(y-z)}=$ $\frac{x^2\cdot y-y^2\cdot x-x^2\cdot z+y^2\cdot z+z^2\cdot x-z^2\cdot y}{(x-y)\cdot(x-z)(y-z)}=$ $\frac{xy(x-y)-z\left(x^2-y^2\right)+z^2(x-y)}{(x-y)\cdot(x-z)(y-z)}=$ $\frac{(x-y)\left(xy-zx-zy+z^2\right)}{(x-y)\cdot(x-z)(y-z)}=1;$ Egalitatea din problemă devine: $x^2+y^2+z^2=62,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{Z};$ $x,\ y,\ z\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2,y^2,z^2\in\mathbb{N}\Rightarrow;$ $62=1+25+36$ sau 4+9+49=62; $62=1+25+36\Rightarrow(\pm1,\pm5,\pm6)$ sau permutările lor; 4+9+49=62 $\Rightarrow(\pm2,\pm3,\pm7)$ sau permutările lor.	**3p** **1p** **1p** **2p**

4.	*a*) Se aplică inegalitatea mediilor: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $(\forall) a,b \in \mathbb{R}_+^*$ pentru *a*=1; *b*=$\sqrt{x}$ *sau* $\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{1+x} \le 2 \Leftrightarrow 1+2\sqrt{x}+x \le 2+2x \Leftrightarrow$ $x-2\sqrt{x}+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \ge 0 \ (A), (\forall) x \in \mathbb{R}_+^*.$	**2p**
	b) $\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 1 \Rightarrow x+y \ge 2 \\ z \cdot t = 1 \Rightarrow z+t \ge 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z+t \ge 4 \left.\right\vert \stackrel{\cdot 2}{\Rightarrow} 2 \cdot (x+y+z+t) \ge 8 \Rightarrow$ $\sqrt{2 \cdot (x+y+z+t)} \ge 2\sqrt{2};$	**2p**
	$x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x};$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \le \sqrt{2}$ (se aplică inegalitatea mediilor: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $a,b \in \mathbb{R}_+$).	**1p**
	Analog $\frac{1}{\sqrt{1+z}} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \le \sqrt{2}:$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \le \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{1+z}} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \le \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \le 2\sqrt{2} \le \sqrt{2 \cdot (x+y+z+t)}.$	**1p**