Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi B=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) . Să se calculeze rang$(A-B)$.

b) . Să se determine matricele $T \in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A \cdot T - T \cdot A = B \cdot T - T \cdot B$ şi $T^3 = I_3$.

Problema 2

Fie E=$\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \middle| a+d=b+c \right\}$ mulţimea matricelor echilibrate.

a) Să se demonstreze că dacă A şi $A^2 \in E$, atunci detA=0.

b) Să se demonstreze că $(\forall)$A, B $\in$ E şi $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot A + \beta \cdot B \in E$.

c) Să se demonstreze că dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât A^n şi $A^{n+1} \in E$ atunci detA=0

Problema 3.

Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4 \cdot x+1} - \sqrt[3]{x+6} - \sqrt[4]{x-1}}{3^x + 4^x - 5^x}$.

Problema 4.

a) Fie $a > 0$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2^a + 3^a + \ldots + n^a}{n^{a+1}} = \dfrac{1}{a+1}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \ldots + \sqrt[4]{n}}{n \cdot \sqrt[4]{n^3} \cdot \left(\sqrt[4]{(n+1)^2 + 1} - \sqrt[4]{n^2+1} \right)}$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7