Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a X-a-Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	Soluţie, rezolvare	Punctaj

1.	a) Condiţii de existenţă: $x,\ y>0 \Leftrightarrow x, y\in(0,\infty)$. $\log_3 x-\log_3 y=1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{y}=1 \Rightarrow x=3\cdot y$; $\left.\begin{array}{l}3^x+3^y=30\\ x=3\cdot y\end{array}\right\} \Rightarrow 3^{3\cdot y}+3^y=30$ $\left.\begin{array}{l}\text{Notăm } 3^y=a,\ a>0\\ 3^{3\cdot y}+3^y=30\end{array}\right\} \Rightarrow a^3+a-30=0 \Rightarrow a^3-27+a-3=0 \Rightarrow$ $(a-3)(a^2+3a+10)=0 \Rightarrow a=3$; $3^y=3 \Rightarrow y=1,\ x=3$. b) Condiţii de existenţă: $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 3x-4x^3\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in[-1;1]\\ x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\end{cases} \Rightarrow$ $x\in\left[-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ Ridicăm ambii membri la puterea a doua $\Rightarrow 1-x^2=9x^2-24\cdot x^4+16\cdot x^6 \Leftrightarrow$ $16\cdot x^6-24\cdot x^4+10\cdot x^2-1=0 \Leftrightarrow$ $16\cdot x^6-8\cdot x^4-16\cdot x^4+8\cdot x^2+2\cdot x^2-1=0 \Leftrightarrow$ $8\cdot x^4\cdot(2\cdot x^2-1)-8\cdot x^2\cdot(2\cdot x^2-1)+(2\cdot x^2-1)=0 \Leftrightarrow$ $(2\cdot x^2-1)\cdot(8\cdot x^4-8\cdot x^2+1)=0 \Rightarrow$ $2\cdot x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left[-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ soluţie; $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin\left[-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $\left.\begin{array}{l}\text{sau } 8\cdot x^4-8\cdot x^2+1=0\\ \text{Notăm } x^2=a,\ a\in(0;1]\end{array}\right\} \Rightarrow 8\cdot a^2-8\cdot a+1=0 \Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$;	**1p** **2p** **1p** **1p** 1p

	1. $x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $x_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}(Fals)$ $x_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}(A)$; $x_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}>-1\Rightarrow x_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ este soluţie; 2. $x^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $x_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}(A)\Rightarrow x_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ este soluţie $x_4=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}(Fals)$ Mulţimea soluţiilor este $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}$.	1p
2.	Din $a_i,b_i\in(1,\infty),(\forall)i\in\{1,2\}\Rightarrow\log_{a_1}b_1>0;\ \log_{a_2}b_2>0$ $\log_{a_1}\sqrt{b_1}=\frac{1}{2}\cdot\log_{a_1}b_1$, $\log_{b_1}a_1^2=2\cdot\log_{b_1}a_1$; $\frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_1}\sqrt{b_1}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_1}a_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\cdot\log_{a_1}b_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2\cdot\log_{b_1}a_1}}=$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\log_{a_1}b_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\log_{a_1}b_1}}}=$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\log_{a_1}b_1}}+\frac{\sqrt{\log_{a_1}b_1}}{\sqrt{2+\log_{a_1}b_1}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\log_{a_1}b_1}}{\sqrt{2+\log_{a_1}b_1}}\le\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (conform inegalităţii mediilor: $\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\ (\forall)x,y\in(0,\infty)\Leftrightarrow$ $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{2}}$) $\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_1}\sqrt{b_1}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_1}a_1^2}}\le\sqrt{2}$ (1) Analog, $\frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_2}\sqrt{b_2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_2}a_2^2}}\le\sqrt{2}$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_1}\sqrt{b_1}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{a_2}\sqrt{b_2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_1}a_1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{b_2}a_2^2}}\le2\cdot\sqrt{2}$	**1p** **3p** **1p** **2p**

3.

Metoda 1.

Fie $x_1,\ x_2 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei, $|x_1| = |x_2| = r$; **1p**

Atunci, fie $x_1 = r\cdot(\cos t + i\cdot\sin t),\ x_2 = r\cdot(\cos u + i\cdot\sin u),\ t,u \in [0,2\pi)$; **1p**

Relaţiile lui Viete sunt: $x_1 + x_2 = -p;\ \ x_1\cdot x_2 = q$;

$$x_1 + x_2 = -p \Rightarrow (x_1+x_2)^2 = p^2 \Rightarrow r^2\cdot\left[\cos t + \cos u + i\cdot(\sin t + \sin u)\right]^2 = p^2 \Rightarrow$$

$$r^2\cdot\left(2\cdot\cos\frac{t+u}{2}\cdot\cos\frac{t-u}{2} + 2\cdot i\cdot\sin\frac{t+u}{2}\cdot\cos\frac{t-u}{2}\right)^2 = p^2 \Rightarrow$$

$$r^2\cdot 4\cdot\cos^2\frac{t-u}{2}\cdot\left(\cos\frac{t+u}{2} + i\cdot\sin\frac{t+u}{2}\right)^2 = p^2 \Rightarrow$$

$$r^2\cdot 4\cdot\cos^2\frac{t-u}{2}\cdot\left[\cos(t+u) + i\cdot\sin(t+u)\right] = p^2 \qquad (1)$$ **2p**

$$x_1\cdot x_2 = q \Rightarrow r^2\cdot\left[\cos(t+u) + i\cdot\sin(t+u)\right] = q \qquad (2)$$ **1p**

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{p^2}{q} = 4\cdot\cos^2\dfrac{t-u}{2} \in \mathbb{R}$;

Dar $\cos\dfrac{t-u}{2} \in [-1,1],\ (\forall)t,u \in [0,2\pi) \Rightarrow \cos^2\dfrac{t-u}{2} \in [0;1] \Rightarrow \dfrac{p^2}{q} = 4\cdot\cos^2\dfrac{t-u}{2} \in [0;4]$. **2p**

Metoda 2.

Fie $x_1,\ x_2 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei, $|x_1| = |x_2| = r$;

$q \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0; x_2 \neq 0$;

Relaţiile lui Viete sunt: $x_1 + x_2 = -p;\ x_1\cdot x_2 = q$;

$$\frac{p^2}{q} = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1\cdot x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\cdot x_2}{x_1\cdot x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2;$$

Fie y$=\dfrac{x_1}{x_2}$; $|y| = \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} = 1 \Rightarrow y\cdot\overline{y} = 1 \Rightarrow \overline{y} = \dfrac{1}{y}$;

Fie y$=\cos t + i\cdot\sin t,\ t \in [0,2\pi)$;

Atunci $\dfrac{p^2}{q} = y + \dfrac{1}{y} + 2 = y + \overline{y} + 2 = 2\cdot\cos t + 2 = 2\cdot(1+\cos t) = 2\cdot 2\cdot\cos^2\dfrac{t}{2} = 4\cdot\cos^2\dfrac{t}{2} \in \mathbb{R}$;

Dar $\cos^2\dfrac{t}{2} \in [0;1] \Rightarrow \dfrac{p^2}{q} = 4\cdot\cos^2\dfrac{t}{2} \in [0;4]$.

4.	a) Înlocuim x cu $i\cdot x$ în relaţia $f\left(x\right)\cdot f\left(i\cdot x\right)=x^2 \Rightarrow f\left(i\cdot x\right)\cdot f\left(-x\right)=-x^2$; $\left.\begin{array}{l} f\left(x\right)\cdot f\left(i\cdot x\right)=x^2 \\ f\left(i\cdot x\right)\cdot f\left(-x\right)=-x^2 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} f\left(i\cdot x\right)\cdot\left(f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right)=0$; Dar $f\left(i\cdot x\right)$ nu poate fi 0 pentru $\left(\forall\right)x\in\mathbb{C}\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0,\left(\forall\right)x\in\mathbb{C}$.	**3p**
	b) i. Pentru $x\geq 0$, $y\geq 0\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(y\right)=f\left(x\cdot y\right)=0\Rightarrow$ inegalitatea este verificat Pentru $x<0$, $y<0\Rightarrow f\left(x\right)=m\cdot x$, $f\left(y\right)=m\cdot y$, $f\left(x\cdot y\right)=0$; $x\cdot f\left(y\right)+y\cdot f\left(x\right)=x\cdot m\cdot y+y\cdot m\cdot x=2\cdot m\cdot x\cdot y\geq 0=f\left(x\cdot y\right)$ Pentru $x<0$, $y\geq 0\Rightarrow f\left(x\right)=m\cdot x$, $f\left(y\right)=0$, $f\left(x\cdot y\right)=m\cdot x\cdot y$; $x\cdot f\left(y\right)+y\cdot f\left(x\right)=m\cdot x\cdot y=f\left(x\cdot y\right)$ Deci, inegalitatea din enunţ este satisfăcută, $\left(\forall\right)x,y\in\mathbb{R}$.	**2p**
	ii) 1. Pentru $y=0\Rightarrow f\left(0\right)\leq x\cdot f\left(0\right)$, $\left(\forall\right)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(0\right)=0$; Pentru $y=1\Rightarrow f\left(x\right)\leq x\cdot f\left(1\right)+f\left(x\right)\Rightarrow x\cdot f\left(1\right)\geq 0,\left(\forall\right)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(1\right)=0$; Aşadar, $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0\Rightarrow f$ nu este injectivă. 2. Pentru $x=y=-1\Rightarrow f\left(1\right)\leq -2f\left(-1\right)\Rightarrow f\left(-1\right)\leq 0$; Pentru $x\geq 0$, $y=-1\Rightarrow f\left(-x\right)\leq x\cdot f\left(-1\right)-f\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(-x\right)\leq x\cdot f\left(-1\right)$ Pentru $x<0$, $y=-1$, notăm $x=-t$, $t>0$ şi folosim inegalitatea anterioară, deci $f\left(x\right)+f\left(-x\right)\leq 0$; Aşadar, $f\left(x\right)+f\left(-x\right)\leq 0,\left(\forall\right)x\in\mathbb{R}$.	**2p**