

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați**

**24 februarie-2019**

**Clasa a VII-a**

**Barem de evaluare**

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
<b>1.</b>	Soluție:	
	a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{2018}}} \Big  \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$	1p
	$\sqrt{2} \cdot A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{2017}}};$	1p
	Scădem cele două egalități :	
	$(\sqrt{2} - 1) \cdot A = 1 - \frac{1}{\sqrt{2^{2018}}} \Rightarrow (\sqrt{2} - 1) \cdot A = 1 - \frac{1}{2^{1009}} \in \mathbb{Q};$	1p
	b) $1 - \frac{1}{2^{1009}} < 1 \Rightarrow$	2p
	$(\sqrt{2} - 1) \cdot A < 1 \Rightarrow$	
	$A < \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow$	1p
	$A < \sqrt{2} + 1.$	1p

2.	<p>Metoda 1.</p> <p>Prin punctul B construim <math>BN \parallel AM</math>, <math>N \in AC</math>.</p> $\begin{cases} AM \parallel BN \\ BM=MC \end{cases} \Rightarrow AM \text{ este linie mijlocie în triunghiul } NBC \Rightarrow AM = \frac{BN}{2}$ <p>Dar <math>AM=BH \Rightarrow BH = \frac{BN}{2}</math></p> $\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle BHN: m(\angle H) = 90^\circ \\ BH = \frac{BN}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle BNH) = 30^\circ = m(\angle MAC) \text{ (unghiuri corespondente)}$ <p>Metoda 2.</p> <p>Prin punctul M construim <math>MP \parallel BH</math>, <math>P \in AC</math>;</p> $\begin{cases} MP \parallel BH \\ BM=MC \end{cases} \Rightarrow PM \text{ este linie mijlocie în triunghiul } HBC \Rightarrow PM = \frac{BH}{2} = \frac{AM}{2};$ $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \parallel MP \end{cases} \Rightarrow MP \perp AC;$ $\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle AMP: m(\angle P) = 90^\circ \\ PM = \frac{AM}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle MAP) = 30^\circ.$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
3.	<p>Soluție:</p> <p>a) <math>\frac{1}{a+bc} = \frac{a}{(a+b) \cdot (a+c)} \Leftrightarrow (a+b) \cdot (a+c) = a \cdot (a+bc) \Leftrightarrow</math></p> $a^2 + ac + bc + ba = a^2 + abc \Leftrightarrow$ $ac + bc + ba = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ (A)}.$ <p>b) <math>\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{c-1}{c} \Rightarrow a+b = \frac{ab \cdot (c-1)}{c};</math></p> <p>Analog <math>b+c = \frac{cb \cdot (a-1)}{a}; a+c = \frac{ca \cdot (b-1)}{b};</math></p> $\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab} = \frac{a}{(a+b) \cdot (a+c)} + \frac{b}{(a+b) \cdot (b+c)} + \frac{c}{(a+c) \cdot (b+c)} =$ $\frac{a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)}{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)} = \frac{2 \cdot (ab+ac+bc)}{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)} = \frac{2abc}{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)} =$ $\frac{2abc}{\frac{ab \cdot (c-1)}{c} \cdot \frac{cb \cdot (a-1)}{a} \cdot \frac{ca \cdot (b-1)}{b}} = \frac{2}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot (c-1)}.$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

4.	<p>Soluție:</p> <p>a) Fie <math>DE \cap AB = \{M\}, DH \cap BE = \{N\}</math></p> <p><math>\triangle DBE: \begin{cases} BM \perp DE \\ DN \perp EB \\ BM \cap DN = \{H\} \end{cases} \Rightarrow H \text{ este ortocentrul } \triangle DBE \Rightarrow EH \perp BD, EH \cap BD = \{O\}</math></p> <p><math>\begin{cases} DE = EB \Rightarrow \triangle DBE \text{ isoscel} \\ EH \perp BD \end{cases} \Rightarrow EO \text{ mediană} \Rightarrow DO = OB \quad (1)</math></p> <p><math>\begin{cases} DC \parallel HB \\ \text{sec } BD \end{cases} \Rightarrow \angle HBD = \angle BDC \quad (2)</math></p> <p>Din (1), (2) <math>\Rightarrow \triangle BOH \cong \triangle DOC \Rightarrow DC = BH</math></p> <p><math>\triangle DBH: \begin{cases} HO \perp BD \\ HO \text{ mediană} \end{cases} \Rightarrow \triangle DBH \text{ este isoscel} \Rightarrow DH = HB</math></p> <p><math>\begin{cases} DC \parallel BH \\ DC = BH \\ DH = HB \end{cases} \Rightarrow DCBH \text{ romb.}</math></p> <p>b) ABCD trapez isoscel <math>\Rightarrow AC = BD = 2BO</math></p> <p>Atunci cerința problemei devine: <math>2 \cdot BC \cdot BE = CE \cdot AC \Leftrightarrow BC \cdot BE = CE \cdot BO \Leftrightarrow \frac{BC}{CE} = \frac{BO}{BE}</math> (de demonstrat)</p> <p><math>BCDH \text{ romb} \Rightarrow BO \perp CH, BC \parallel DH</math></p> <p><math>\begin{cases} BC \parallel DH \\ DH \perp BE \end{cases} \Rightarrow BC \perp BE</math></p> <p><math>\triangle BCO \sim \triangle ECB \quad (\angle C - \angle \text{ comun; } \angle O \equiv \angle B) \Rightarrow \frac{BC}{CE} = \frac{BO}{BE}.</math></p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
----	--	---