Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Casa a VII-a

Problema 1.

Fie numărul A$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2^2}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2^{2018}}}$.

Să se demonstreze:

a) $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot \mathrm{A}\in\mathbb{Q}$.

b) $\mathrm{A}<\sqrt{2}+1$.

Problema 2.

În triunghiul ascuţitunghic ABC, mediana AM, $M\in BC$, este congruentă cu înălţimea BH, $H\in AC$. Să se calculeze măsura unghiului $\measuredangle CAM$.

Problema 3.

Să se demonstreze că dacă $a,\ b,\ c$ sunt numere reale strict pozitive care satisfac condiţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, atunci:

a) $\frac{1}{a+b\cdot c}=\frac{a}{(a+b)\cdot(a+c)}$.

b) $\frac{1}{a+b\cdot c}+\frac{1}{b+a\cdot c}+\frac{1}{c+a\cdot b}=\frac{2}{(a-1)\cdot(b-1)\cdot(c-1)}$.

Problema 4.

Se consideră trapezul isoscel ABCD cu AB || CD şi AD=DC=BC. Pe perpendiculara din D pe AB se consideră punctul E astfel încât D şi E sunt de o parte şi de alta a dreptei AB şi DE=BE. Perpendiculara din D pe BE intersectează latura AB în H.

a) Să se demonstreze că patrulaterul DHBC este romb.

b) Să se demonstreze că $2\cdot BC\cdot BE=CE\cdot AC$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7