Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

24 februarie 2019

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu termenul general $I_n=\int\limits_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+a}dx,\ a>0.$

a) Să se demonstreze că $I_{n+2}+I_{n+1}+a\cdot I_n=\frac{1}{n+1}.\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$

b) Să se demonstreze că $\frac{1}{(a+2)\cdot(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{(a+2)\cdot(n-1)},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 2.$

c) Să se determine numărul *a* ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot I_n\right)=\frac{1}{2019}$.

Problema 2.

Fie G un grup şi H, respectiv K două subgrupuri ale lui G. Să se demonstreze că $\mathrm{H}\cup\mathrm{K}$ este subgrup dacă şi numai dacă $\mathrm{H}\subset\mathrm{K}$ sau $\mathrm{K}\subset\mathrm{H}$.

Problema 3.

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 2024 elemente şi fie $a\in G$ astfel încât $\mathrm{ord}(a)=11$.

Să se rezolve în grupul $(G,\cdot)$ ecuaţia $x^{2019}=a$.

Problema 4.

a) Să se demonstreze că $\ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2},\ (\forall)\mathrm{x}\in[0,\infty)$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, funcţie continuă. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx.$

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7