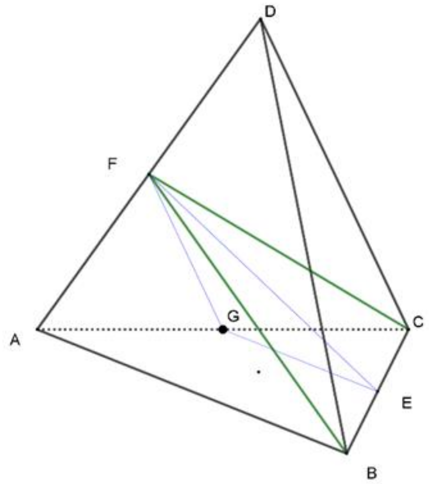
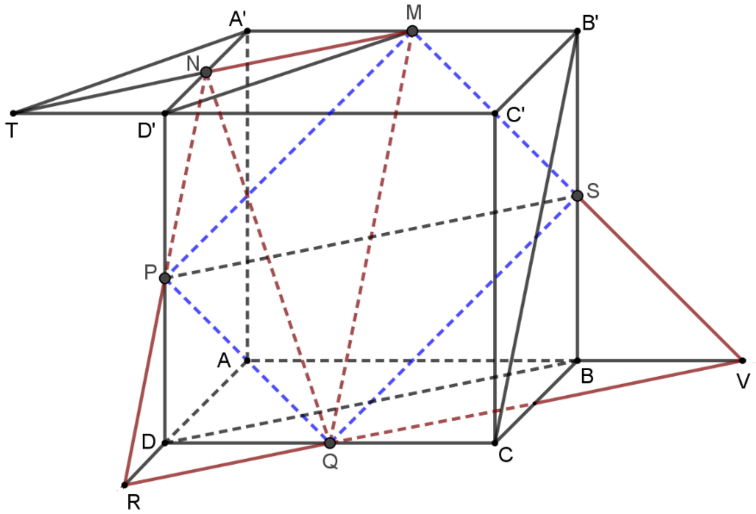
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- Galaţi, 10 februarie 2024
Clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

● **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

● **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. Problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Din, $x; y \in [0; 1]$, rezultă : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \geq 0$ $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow 1 - y \geq 0$ Aducând relația din enunț la același numitor, obținem $\frac{1-x-y-1}{x+y+1} \leq \frac{2xy-3x-3y}{6}$, de unde: $-6x - 6y \leq 2x^2y + 2xy^2 + 2xy - 3x^2 - 3xy - 3x - 3xy - 3y^2 - 3y$	**1p**
	Reducând termenii asemenea, vom obține: $2x^2y + 2xy^2 - 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 3x + 3y \geq 0$	**1p**
	Grupând convenabil termenii, obținem : $(2x^2y - 2x^2 - 2xy + 2x) + (2xy^2 - 2y^2 - 2xy + 2y) + x + y - x^2 - y^2 \geq 0$	**2p**
	Dând factor comun, obținem $2x(xy - x - y + 1) + 2y(xy - y - x + 1) + x - x^2 + y - y^2 \geq 0$	**1p**
	Grupând convenabil termenii din paranteză, obținem: $2x(1-x)(1-y) + 2y(1-x)(1-y) + x(1-x) + y(1-y) \geq 0$	**1p**
	deci, $2(1-x)(1-y)(x+y) + x(1-x) + y(1-y) \geq 0$, ceea ce este evident, deoarece $x; y \in [0; 1]$	**1p**
2.	a) Notăm n = $a^2 - 2a$. Atunci A = (n+3)(n-33) +324 = $(n-15)^2$	**2p**
	A = $(a^2 - 2a - 15)^2$	**1p**
	b) $a^2 - 2a - 15 = (a-5)(a+3)$	**1p**
	pentru a = 2k+1, k ∈ ℕ , $(a-5)(a+3) = 4(k-2)(k+2)$	**1p**
	Dacă $a^2 - 2a - 15$ este divizibil cu 4, oricare ar fi a, număr natural impar	**1p**
	Rezultă că A este divizibil cu 16	**1p**
3.	a)Notam AB = a fie G mijlocul lui AC, F mijlocul lui AD , FG linie mijlocie în Δ ACD ⇒ FG ∥ DC ; FG = $\frac{a}{2}$ E mijlocul lui BC și G mijlocul lui AC, EG linie mijlocie în Δ ABC ⇒ EG ∥ AB; EG = $\frac{a}{2}$	**1p**
	∡(AB; CD) = ∡(FG; EG)= ∡ FEG AB = a ⇒ BF=CF = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ⇒ Δ BFC isoscel ⇒ FE ⊥ BC ⇒ Δ FEC , ∡E = 90^o ⇒ FE = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$	**1p**

	EG= FG = $\frac{a}{2}$ și FE = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ⇒ ∡ FGE = 90^o ⇒ ∡(AB; CD) =90^o b) FG ∥ DC ⇒ ∡(BF; CD) = ∡(BF; FG)= ∡ BFG BF= BG = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ⇒ Δ BFG isoscel de bază FG Fie H mijlocul lui FG ⇒ BH ⊥ FG ⇒ Δ BHF dreptunghic în H ⇒ BH = $\frac{a\sqrt{11}}{4}$ tg(∡ BFG) = $\frac{BH}{FH} = \sqrt{11}$ 	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
4.	a) $\Delta NA'M \equiv \Delta ND'T\ conform\ C.U. \begin{cases} NA' \equiv ND' \\ \sphericalangle A'NM \equiv \sphericalangle D'NT \end{cases} \Rightarrow A'M \equiv D'T$ dar $A'B' \parallel D'C' \Rightarrow A'M \parallel D'T$ deci $A'MD'T$ paralelogram ⇒$A'T \equiv MD'$ b) Fie $DA \cap NP = \{R\}, AB \cap MS = \{V\}$ iar planul (MNQ) coincide cu planul (MNRV) Dreptele $MS \parallel PQ$ $și$ $MS \equiv PQ$ $deoarece$ $MS = \frac{A'B}{2} = \frac{D'C}{2} = PQ$⇒ PQSM paralelogram (1) Dar PDBS paralelogram(PD∥SB și PD≡SB)⇒$PS \equiv DB$ și $MB'CQ$ paralelogram ($MB' \parallel CQ$ $și$ $MB' \equiv CQ$) ⇒$B'C \equiv MQ$, dar $B'C \equiv DB \Rightarrow MQ \equiv PS$ (2) $(1) si\ (2) \Rightarrow PQSM$ dreptunghi 	**1p** **2p** **1p** **1p** **1p** **1p**