Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală- Galaţi, 10 februarie 2024
Clasa a IX-a

Barem de notare și evaluare

● **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

● **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. Problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Se utilizează inegalitatea $m_h \le m_a$ $\frac{2}{\frac{1}{3a}+\frac{1}{b}} \le \frac{3a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{3a+b}$	3p
	Se scriu inegalitățile analoage și se adună: $\frac{1}{3a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{3a+b}$ $\frac{1}{3b}+\frac{1}{c} \ge \frac{4}{3b+c}$ $\frac{1}{3c}+\frac{1}{a} \ge \frac{4}{3c+a}$	2p
	Se obține $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge \frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}$, de unde rezultă inegalitatea din enunț.	2p
2.	$\overrightarrow{r_N} = \frac{1}{1+5}\overrightarrow{r_B} + \frac{5}{1+5}\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{6}\overrightarrow{r_B} + \frac{5}{6}\overrightarrow{r_C} \to \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} +$ $+\frac{5}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$	2p
	$\overrightarrow{r_P} = \frac{5}{6}\overrightarrow{r_D} + \frac{1}{6}\overrightarrow{r_C} \to \overrightarrow{AP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$	2p
	$\overrightarrow{r_G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_P}) \to \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} +$ $+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB})$	2p
	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{11}{6}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{11}{18}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{11}{18}\overrightarrow{AC} \to G \in AC$	1p
3.	Rezolvare: $\frac{x^3-3x-3}{2x-1} = y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 8y = \frac{8x^3-24x-24}{2x-1} \in \mathbb{Z}$; $8y = \frac{8x^3-24x-24}{2x-1} =$ $= \frac{8x^3-1-24x-23}{2x-1} = \frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)-12(2x-1)-35}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$	3p
	$8y = (4x^2+2x+1) - 12 - \frac{35}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x-1 \in \{1,-1,5,-5,7,-7,35,-35\}$	2p

	$\Leftrightarrow x \in \{1, 0, 3, -2, 4, -3, 18, -17\}$ Toate valorile lui $x \in \{1, 0, 3, -2, 4, -3, 18, -17\}$verifică $\frac{x^3-3x-3}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\mathcal{A} = \{1, 0, 3, -2, 4, -3, 18, -17\}$	2p
4.	a) Din teorema bisectoarei $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AB_1}{AC} = \frac{c}{a+c}$. $\overrightarrow{AB_1}$ și $\overrightarrow{AC}$ au aceeași direcție și același sens $\Rightarrow \overrightarrow{AB_1} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$.	1p
	G este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă că $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul lui BC, dar $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$	1p
	$\overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AG} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)}\overrightarrow{AC}$.	2p
	b) Din a) $\overrightarrow{GB_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)}\overrightarrow{AC}$ și analog $\overrightarrow{GC_1} = \frac{2b-a}{3(a+b)}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	1p
	B_1, C_1 și G sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2b-a}{3(a+b)}} = \frac{\frac{2c-a}{3(a+c)}}{-\frac{1}{3}}$ $\Leftrightarrow (a+b)(a+c) = (2b-a)(2c-a) \Leftrightarrow bc = ac + ab \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.	2p